Jurnal Teknik Industri, Vol. 18, No. 1, Juni 2016, 43-50
ISSN 1411-2485 print / ISSN 2087-7439 online
DOI: 10.9744/jti.18.1.43-50

Karakteristik Kurva Efisien *Frontier* dalam Menentukan Portofolio Optimal

Epha Diana Supandi[1*], Dedi Rosadi[2], Abdurahman[2]

Abstract: In this paper the characteristics of efficient frontier curve on Markowitz portfolio model mathematically investigated. The optimal portfolio is obtained by using Lagrange methods. Also, in this study the characteristics of optimal portfolio on minimum variance portfolio, tangency portfolio and the *mean-variance* portfolio examined as well as its position on the efficient frontier curve. Furthermore, a numerical example from data based on several stocks traded in Indonesian capital market is provided to show a more real problem solution.

Keywords: Efficient frontier curve; minimum-variance portfolio; tangency portfolio; *mean-variance* portfolio; Lagrange methods.

Pendahuluan

Analisis investasi dalam keuangan dapat dilakukan dengan berbagai model, diantaranya dengan menggunakan model portofolio. Portofolio Markowitz [1] adalah model yang populer untuk melakukan diversifikasi investasi. Model portofolio Markowitz sudah banyak didiskusikan pada berbagai literatur baik di bidang keuangan, matematika keuangan dan statistika. Beberapa penelitian diantaranya (Broadie [2], Ceria dan Stubbs [3], DeMiguel *et al.* [4], Engles [5], Fabozy *et al.* [6], Green dan Hollifield [7] serta Michaud [8]).

Penentuan portofolio efisien merupakan hal terpenting yang harus diperhatikan dalam menentukan portofolio optimal. Suatu portofolio efisien didefinisikan sebagai portofolio yang memaksimumkan tingkat return (yang diukur dengan mean) pada risiko tertentu (yang diukur dengan deviasi standar), atau portofolio yang meminimumkan risiko pada tingkat return tertentu. Kurva yang memperlihatkan kumpulan semua portofolio efisien pada konsep *risk-return* disebut kurva efisien frontier (Elton dan Gruber [9]).

Beberapa penelitian mengenai kurva efisien frontier diantaranya adalah Bailey dan Lopez de Prado [10] yang meneliti kurva efisien frontier pada portofolio tangency (Sharpe ratio). Broadie [2] mengkaji kurva efisien frontier dengan melakukan simulasi dan mengukur root mean square error dari portofolio optimal model *mean-variance*.

Selanjutnya Merton [11] meneliti karakteristik kurva efisien frontier pada model *minimum-variance* khususnya pada *mutual fund.* Engles [5] meneliti karakteristik portofolio model *minimum-variance* dengan *risk-free asset.* Kelebihan dari tulisan ini terletak pada rincian yang lebih detail mengenai penurunan rumus kurva EF pada portofolio model Markowitz Pada makalah ini kurva efisien frontier pada berbagai model portofolio yaitu portofolio *mean-variance*, minimum-*variance* dan *tangency* dibangun dan selanjutnya dicari hubungan ketiga model tersebut melalui persamaan matematis

Metode Penelitian

Kurva Efisien *Frontier*

Misalkan $r = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T$ adalah data *return* dari m aset dengan vektor mean $\mu \in \Re^m$ dan matriks kovariansi $\Sigma \in \Re^{m\times m}$. Selanjutnya w_i adalah bobot modal yang diinvestasikan pada aset ke-$i = 1,2,\cdots,m$. Diasumsikan investor menanamkan semua modalnya sehingga $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ atau dapat dituliskan $e^T w = 1$, dimana $e \in \Re^m$ adalah vektor dengan elemen satu. Portofolio adalah sekumpulan aset yaitu $R_p = w_1 r_1 + \cdots + w_m r_m = w^T r$, maka mean portofolio adalah $\mathrm{E}(w^T r) = w^T \mu$ dan risiko portofolio $\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(w^T r) = w^T \Sigma w$.

Efisien frontier dapat dicari dengan meminimumkan risiko portofolio pada tingkat keuntungan tertentu μ_p, masalah ini dapat dicari solusinya dengan menyelesaikan persamaan berikut ini (Merton [11]):

$$\min \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$
$$\text{kendala:} \quad w^T \mu = \mu_p \qquad (1)$$
$$w^T e = 1$$

Menggunakan metode Lagrange, maka masalah optimasi (1) menjadi:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda_1 (\mu_p - w^T \mu) + \lambda_2 (1 - w^T e) \qquad (2)$$

yang mana λ_1 dan λ_2 adalah pengali Lagrange.

[1] Fakultas Sains dan Teknologi, Program Studi Matematika, UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta,Jl. Marsda Adisucipto, Yogyakarta 55281, Indonesia. Email: epha.supandi@uin-suka.ac.id
[2] Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Jurusan Matematika, Universitas Gadjah Mada, Jl. Sekip Utara Bulak Sumur 21, Yogyakarta 55281, Indonesia.
Email: dedirosadi@ugm.ac.id, rachmanstat@ugm.ac.id

* Penulis korespondensi

Syarat pertama untuk mencari nilai optimum dari persamaan (2) adalah:

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dw}} = \Sigma \mathrm{w} - \lambda_1 \mu - \lambda_2 e = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}\lambda_1} = \mu_p - w^T \mu = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}\lambda_2} = 1 - w^T e = 0 \quad (3c)$$

Dari persamaan (3a) , (3b) dan (3c) diperoleh:

$$w = \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 e) \quad (4a)$$

$$\mu_p = w^T \mu \quad (4b)$$

$$1 = w^T e \quad (4c)$$

Masukan persamaan (4a) ke dalam persamaan (4b) dan (4c) menjadi

$$\lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 e^T \Sigma^{-1} \mu = \mu_p \quad (5a)$$

$$\lambda_1 \mu^T \Sigma^{-1} e + \lambda_2 e^T \Sigma^{-1} e = 1 \quad (5b)$$

Misalnya: $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$; $b = e^T \Sigma^{-1} \mu = \mu^T \Sigma^{-1} e$; dan $c = e^T \Sigma^{-1} e$. Maka persamaan (5a) dan (5b) ditulis dalam bentuk:

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = \mu_p \quad (6a)$$

$$\lambda_1 b + \lambda_2 c = 1 \quad (6b)$$

Misalkan: $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$; $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$

Persamaan (6a) dan (6b) dapat dinyatakan dalam persamaan berikut ini:

$$H\lambda = B$$

$$\lambda = H^{-1} B \quad (7)$$

H adalah matriks simetrik berdimensi 2 x 2, maka: $H^{-1} = \frac{1}{ac-b^2} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$; dengan $d = ac - b^2$.

Parameter a, c dan d selalu positif karena diasumsikan matriks kovariansi Σ adalah matriks simetrik dan juga definit positif sehingga sifat ini berlaku juga untuk matriks invers Σ^{-1}. Oleh karena itu $x^T \Sigma^{-1} x > 0$ untuk semua vektor x, maka sudah dipastikan dalam hal ini $a > 0$ dan $c > 0$.

Selanjutnya $(b\mu - ae)^T \Sigma^{-1} (b\mu - ae)$
$= bba - abb - abb + acc = a(ac - b^2) = ad > 0$
karena $a > 0$, maka $d > 0$.

Berikutnya, misalkan $A = (\mu \quad e)$, maka persamaan (4a) dapat diubah menjadi:

$$\mathrm{w} = \Sigma^{-1} A \lambda \quad (8)$$

dan persamaan (4b) dan (4c) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^T w \quad (9)$$

Diketahui bahwa risiko portofolio $\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(w^T r) = w^{\mathrm{T}} \Sigma w$, dengan menggunakan persamaan (8) dan (9) maka risiko portofolio menjadi:

$$\sigma_p^2 = w^{\mathrm{T}} \Sigma w = w^{\mathrm{T}} \Sigma \Sigma^{-1} A \lambda$$
$$= w^{\mathrm{T}} A \lambda = w^{\mathrm{T}} A H^{-1} B = B^{\mathrm{T}} H^{-1} B$$
$$= (R \quad 1) \frac{1}{d} \begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d} \left(c{\mu_p}^2 - 2b\mu_p + a \right) \quad (10)$$

Persamaan (10) menunjukkan kurva efisien frontier dimana variansi portofolio sebagai fungsi dari return. Menurut Engles [5] bentuk kurva EF pada persamaan (10) adalah parabola dengan titik puncaknya diperoleh dengan mencari turunan pertama terhadap μ_p yaitu:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial \mu_p} = \frac{2c\mu_p - 2b}{d} = 0$$

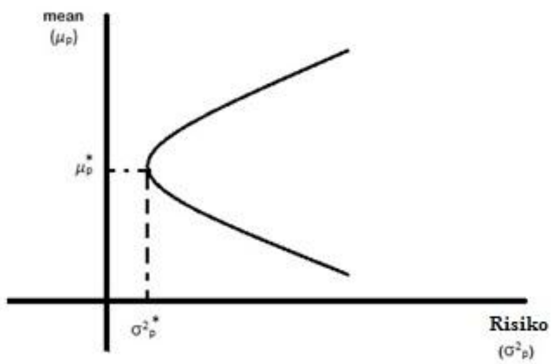
$$\mu_p = \frac{b}{c} \quad (11)$$

Dengan memasukan persamaan (11) kedalam persamaan (10) diperoleh $\sigma_p^2 = 1/\mathrm{c}$. Maka titik minimum terjadi pada $(1/c, b/c)$. Dalam hal ini bentuk kurva EF digambarkan pada ruang $(\sigma_p^2,\ \mu_p)$, sehingga sumbu horizontal (sumbu *x*) adalah risiko (yang diukur dengan σ_p^2) dan sumbu vertical (sumbu *y*) adalah tingkat keuntungan (yang diukur dengan μ_p), maka gambar kurva EF dapat dilihat pada Gambar 1.

Perhatikan bahwa portofolio efisien hanya terjadi pada bagian atas kurva karena pada portofolio tersebut memperoleh tingkat keuntungan yang lebih tinggi pada risiko yang sama.

Kurva efisien frontier biasanya ditampilkan dalam ruang $(\sigma_p\ ,\ \mu_p)$ artinya kurva EF diukur dengan standar deviasi (ukuran *risk*/risiko) dan tingkat keuntungan (diukur dengan return). Alasan ini karena besaran standar deviasi mempunyai besaran yang sama dengan data aslinya, oleh karena itu konsep ini lebih relevan. Dengan mengambil akar kuadrat dari persamaan (10), maka;

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d} \left(c{\mu_p}^2 - 2b\mu_p + a \right)} \quad (12)$$



Gambar 1. Kurva efisien frontier (σ_p^2, μ_p)

Persamaan (12) adalah persamaan hiperbola, hal ini bisa dibuktikan sebagai berikut;

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}\left(c{\mu_p}^2 - 2b\mu_p + a\right)$$
$$= \frac{1}{d}\left(c{\mu_p}^2 - 2b\mu_p + \frac{d}{c} + \frac{b^2}{c}\right) \quad (13)$$

Selanjutnya bagi kedua ruas pada persamaan (13) dengan $\frac{1}{c}$, maka

$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} = \frac{\left({\mu_p}^2 - \frac{2b\mu_p}{c} + \frac{d}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}\right)}{d/c^2}$$
$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} = \frac{\left(\mu_p - \frac{b}{c}\right)^2}{d/c^2} + 1$$
$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} - \frac{\left(\mu_p - \frac{b}{c}\right)^2}{d/c^2} = 1 \quad (14)$$

Persamaan (14) adalah persamaan hiperbola dengan garis asimtot $\mu_p = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{d}{c}}\ \sigma_p$

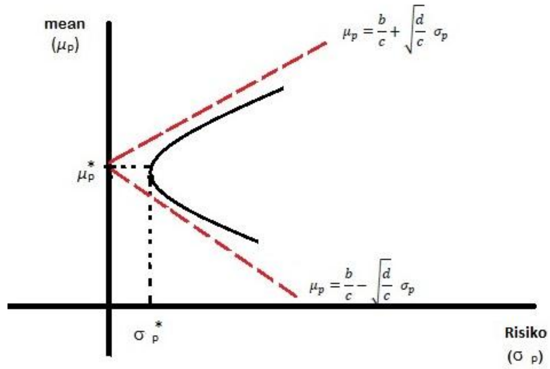
Kurva EF pada kasus ini digambarkan dengan fungsi hiperbola pada bagian kanan saja. Gambar kurva efisien frontier yang ditampilkan dalam ruang $(\sigma_p\ , \mu_p)$ dapat dilihat pada Gambar 2.

Investor tertarik terhadap portofolio w_{EF} yang berada pada kurva efisien frontier (portofolio yang memberikan risiko paling rendah pada tingkat keuntungan (return) tertentu, atau sebaliknya yaitu portofolio yang memberikan tingkat keuntungan maksimal pada tingkat risiko tertentu).

Portofolio optimal w_{ef} dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (8), sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$\mathrm{w}_{ef} = \Sigma^{-1}\ A\,\lambda = \Sigma^{-1}AH^{-1}B$$
$$= \Sigma^{-1}(\mu \quad e)\frac{1}{d}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$w_{ef} = \frac{\Sigma^{-1}}{d}[c\mu - be \quad ae - b\mu]\begin{bmatrix} \mu_p \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$w_{ef} = \frac{\Sigma^{-1}}{d}\left[(c\mu \ - be)\mu_p + (ae - b\mu\ )\right] \quad (15)$$

Sehingga pada setiap tingkat keuntungan yang diinginkan μ_p, alokasi portofolio dapat diketahui dengan menggunakan persamaan (15).



Gambar 2. Kurva efisien frontier dalam ruang $(\sigma_p\ , \mu_p)$

Portofolio Minimum-*Variance*

Pada model ini, investor menginginkan portofolio dengan risiko yang paling kecil. Masalah ini dapat diformulasikan menjadi (Engels [5]):

$$\min \frac{1}{2} w^{\mathrm{T}}\Sigma w$$
$$\text{kendala} : w^T\mathrm{e} = 1 \quad (16)$$

Menggunakan metode Lagrange, diperoleh persamaan berikut ini:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} w^T\Sigma w + \lambda\ \ (1 - w^{\mathrm{T}}e) \quad (17a)$$

kemudian dicari $\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dw}} = 0$, menghasilkan persamaan di bawah ini

$$\Sigma\mathrm{w} - \lambda e = 0; w = \Sigma^{-1}\lambda e \quad (17b)$$

Substitusikan persamaan (17b) terhadap (17a), maka:

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}\lambda^2 e^T\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}e + \lambda(1 - \lambda e^T\Sigma^{-1}e)$$
$$= \frac{1}{2}\lambda^2 e^T\Sigma^{-1}e - \lambda^2 e^T\Sigma^{-1}e + \lambda$$
$$\mathrm{L} = \ \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 e^T\Sigma^{-1}e$$

selanjutnya

$$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}\lambda} = \ 1 - \lambda e^T\Sigma^{-1}e = 0$$
$$\lambda = \frac{1}{e^T\Sigma^{-1}e} = \frac{1}{c} \quad (18)$$

Masukan persamaan (18) terhadap (17b), maka portofolio *minimum-variance* dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut ini:

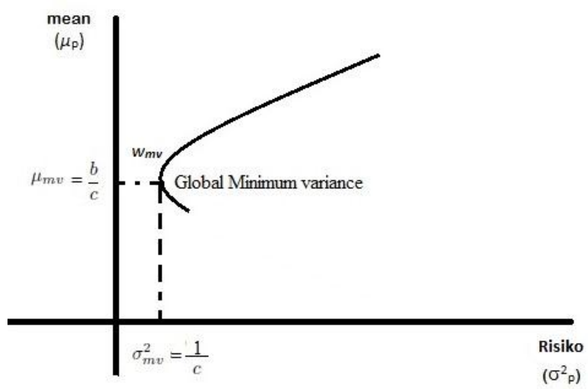
$$w_{mv} = \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} = \frac{\Sigma^{-1}e}{c} \quad (19)$$

selanjutnya dengan menggunakan persamaan di atas, dapat dicari risiko portofolio yaitu sebagai berikut:

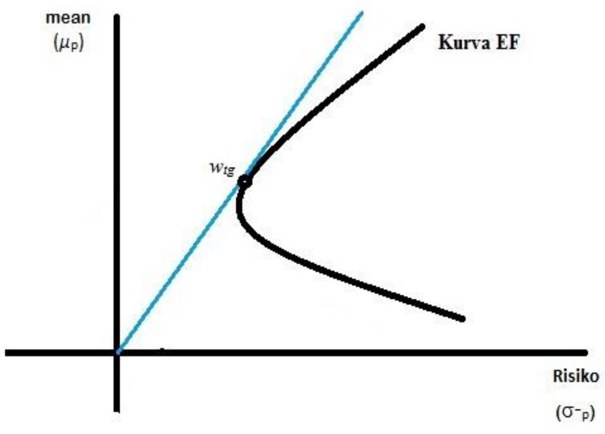
$$\sigma_{mv}^2 = \ w^{\mathrm{T}}\Sigma w = \left(\frac{\Sigma^{-1}e}{c}\right)^T \Sigma\frac{\Sigma^{-1}e}{c}$$
$$= \frac{1}{c^2}e^T(\ \Sigma^{-1})^T\Sigma\Sigma^{-1}e = \frac{1}{c^2}e^T\Sigma^{-1}e = \frac{1}{c^2}c = \frac{1}{c} \quad (20)$$

dan return portofolio *minimum-variance* adalah:

$$\mu_{mv} = \ \mu^{\mathrm{T}}\frac{\Sigma^{-1}e}{c} = \mu^{\mathrm{T}}\frac{\Sigma^{-1}e}{c} = \frac{b}{c} \quad (21)$$



Gambar 3. Kurva efisien frontier portofolio *minimum-variance*



Gambar 4. Kurva efisien frontier portofolio

Apabila diperhatikan risiko dan return portofolio *minimum-variance* sama dengan nilai minimum pada kurva efisien frontier. Kedudukan portofolio *minimum-variance* dapat dilihat Gambar 3.

Portofolio Tangency

Pada model ini, investor menginginkan untuk memaksimumkan Sharpe ratio (SR) yang didefinisikan sebagai ratio return dan risiko yaitu:

$$\text{Sharpe ratio}=\frac{\text{mean}}{\text{standar deviasi}}$$

Persamaan di atas menjelaskan bahwa SR menggambarkan berapa besar return per unit risiko yang diterima investor (Cristie [12], Sharpe [13]). Sehingga SR yang tinggi berarti portofolio tersebut memberikan return paling besar per unit risiko, dengan kata lain portofolio tersebut yang paling efisien.

Kurva efisien frontier dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (12). Misalkan titik singgung (*invers*) pada kurva EF berada pada koordinat (σ_{tg}, μ_{tg}). Maka slope pada garis singgung dititik tersebut adalah:

$$\frac{\Delta\sigma_p}{\Delta\mu_p} = \frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2b\mu_{tg} + a)} - 0}{\mu_{tg} - 0} \tag{22}$$

Tangency slope (*invers*) pada kurva EF diperoleh dengan mencari turunan pertama terhadap μ_p dari persamaan EF (12) yaitu:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial\mu_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2b\mu_p + a)\right)^{-1/2}\frac{1}{d}(2c\mu_p - 2b)\Big|_{\mu_p=\mu_{tg}}$$
$$= \frac{c\mu_{tg} - b}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2b\mu_{tg} + a)}} \tag{23}$$

Kedua *slope* pada garis singgung di titik (σ_{tg}, μ_{tg}) harus sama, sehingga

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2b\mu_{tg} + a)}}{\mu_{tg}} = \frac{c\mu_{tg} - b}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2b\mu_{tg} + a)}}$$
$$\mu_p = \frac{a}{b} \tag{24}$$

Selanjutnya persamaan (24) dimasukan ke dalam persamaan EF (12) menghasilkan

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}\left(c\frac{a^2}{b^2} - 2\frac{ab}{c} + a\right)} = \frac{\sqrt{a}}{b} \tag{25}$$

Untuk mendapatkan portofolio *tangency* maka substitusikan persamaan (24) dan (25) ke dalam persamaan (15), diperoleh

$$w_{tg} = \frac{\Sigma^{-1}}{d}\left[(c\mu - be)\frac{a}{b} + (ae - b\mu)\right]$$
$$= \frac{\Sigma^{-1}}{d}\left[c\mu\frac{a}{b} - ae + ae - b\mu\right]$$
$$w_{tg} = \frac{c\frac{a}{b}\Sigma^{-1}\mu - b\Sigma^{-1}\mu}{d} = \frac{\left(c\frac{a}{b} - b\right)\Sigma^{-1}\mu}{d} = \frac{\left(\frac{ca - b^2}{b}\right)\Sigma^{-1}\mu}{d}$$
$$w_{tg} = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{b} \tag{26}$$

Dimana $d = ca - b^2$. Maka portofolio *tangency* yang optimal dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan di atas.

Pada Gambar 4 nampak bahwa portofolio optimal dengan menggunakan model portofolio tangency berada pada titik singgung kurva EF (Bailey dan Lopez de Prado [10]).

Portofolio *Mean-variance*

Dalam teori portofolio *mean-variance*, investor dapat merubah keinginannya dalam menentukan portofolio dengan menggunakan masalah optimasi berikut ini (Engels [5]):

$$\min \quad w^T\mu - \frac{\gamma}{2}w^{\mathrm{T}}\Sigma w$$
$$\text{kendala:} \quad w^{\mathrm{T}}\mathrm{e} = 1 \tag{27}$$

Koefisien pembobot γ menunjukkan seberapa besar seorang investor mengambil risiko atas expected return. Nilai γ yang kecil mengindikasikan bahwa investor tersebut termasuk investor yang suka terhadap risiko (*risk seeker*), semakin besar nilai γ mengindikasikan bahwa investor tersebut semakin menghindari risiko (*risk averse).*

Permasalahan optimisasi (27) dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$\mathrm{L} = w^T\mu - \frac{\gamma}{2}w^T\Sigma w + \lambda\ (1 - w^{\mathrm{T}}e) \tag{28}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian nilai optimal terhadap *w*, persamaan (28) diturunkan terhadap *w* dan kemudian hasilnya disamakan dengan nol. Sehingga diperoleh persamaan pembobot:

$$\frac{dL}{dw} = \mu - \gamma\Sigma w + \lambda e = 0$$

$$w = \frac{\Sigma^{-1}}{\gamma}(\mu + \lambda e) \quad (29)$$

dengan substitusi persamaan (29) ke persamaan $e^T w = 1$, diperoleh persamaan:

$$e^T\left[\frac{\Sigma^{-1}}{\gamma}(\mu + \lambda e)\right] = 1$$

$$\frac{e^T\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \lambda\frac{e^T\Sigma^{-1}e}{\gamma} = 1$$

$$\frac{b}{\gamma} + \lambda\frac{c}{\gamma} = 1$$

$$\lambda = \frac{\gamma - b}{c} \quad (30)$$

Substitusikan persamaan (30) ke persamaan (29), sehingga diperoleh

$$w = \frac{\Sigma^{-1}}{\gamma}\left(\mu + \left(\frac{\gamma - b}{c}\right)e\right) \quad (31)$$

Persamaan (31) dapat diuraikan menjadi portofolio *minimum-variance* dan tangency. Dimana portofolio *minimum-variance* adalah:

$$w_{mv} = \frac{\Sigma^{-1}e}{c} \Rightarrow \Sigma^{-1}e = w_{mv}\, c$$

sedangkan portofolio *tangency* adalah

$$w_{tg} = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{b} \Longrightarrow \Sigma^{-1}\mu = w_{tg}\, b$$

sehingga portofolio *mean-variance* (31) dapat dituliskan kembali menjadi

$$w = \frac{\Sigma^{-1}}{\gamma}\left(\mu + \left(\frac{\gamma - b}{c}\right)e\right) = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\Sigma^{-1}}{\gamma}\left(\frac{\gamma - b}{c}\right)e$$

$$w = \frac{b}{\gamma}w_{tg} + \left(1 - \frac{b}{\gamma}\right)w_{mv} \quad (32)$$

Jelas sekali terlihat bahwa portofolio *mean-variance* terdiri dari portofolio *minimum-variance* ditambah dengan portofolio *tangency* tergantung dari besarnya nilai *risk averse* (γ). Semakin besar nilai γ, maka portofolio mendekati portofolio *minimum-variance*. Artinya apabila γ menuju tak hingga maka portofolio sama dengan portofolio *minimum-variance*. Apabila $\gamma = b$ maka portofolio sama dengan portofolio *tangency*.

Hasil dan Pembahasan

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data saham mingguan periode 28 Januari 2008 – 29 Desember 2014, sehingga diperoleh 361 data return saham. Adapun data saham yang digunakan adalah lima saham LQ 45 yang tercatat di Bursa Efek Jakarta yaitu Adhi Karya (persero) Tbk. (ADHI) termasuk dalam sektor konstruksi, property dan real estate, Charoen Pokphand Tbk. (CPIN) termasuk dalam sektor industri dasar dan kimia, Media Nusantara Citra Tbk. (MNCN) termasuk dalam sektor perdagangan, servis dan investasi, Unilever Indonesia Tbk. (UNVR) termasuk dalam sektor barang konsumen dan Alam Sutera reality Tbk. (ASRI) termasuk dalam sektor konstruksi, property dan real estate. Nilai mean dan variansi kovariansi untuk ke lima saham dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Dari Tabel 1 terlihat bahwa saham UNVR mempunyai *expected return* (mean) yang paling tinggi dibandingkan saham lainnya, sebaliknya saham ASRI mempunyai *expected return* paling rendah. Sedangkan saham ADHI, MNCN dan CPIN mempunyai *expected return* yang hampir sama yaitu 0,0031; 0,0032 dan 0,0034.

Berdasarkan nilai variansi nampak bahwa CPIN mempunyai variansi yang tinggi (risiko yang besar). Hal yang sangat menarik adalah ternyata UNVR selain memberikan tingkat keuntungan yang tinggi (*expected return* besar) juga mempunyai risiko yang kecil dibandingkan saham lainnya. Sehingga dari ke lima tersebut kinerja dari saham UNVR paling baik dibandingkan saham–saham lainnya.

Berdasarkan nilai variansi nampak bahwa CPIN mempunyai variansi yang tinggi (risiko yang besar). Hal yang sangat menarik adalah ternyata UNVR selain memberikan tingkat keuntungan yang tinggi (*expected return* besar) juga mempunyai risiko yang kecil dibandingkan saham lainnya. Sehingga dari ke lima tersebut kinerja dari saham UNVR paling baik dibandingkan saham – saham lainnya.

Menggunakan data tersebut, selanjutnya dibentuk kurva efisien frontier serta portofolio optimal pada ke tiga model portofolio (*minimum-variance*, *tangency* dan *mean-variance*). Pada kajian ini, portofolio *mean-variance* akan ditentukan pada kasus nilai *risk averse* γ = 1, 5, 10, 50, 100 dan 1000. Pengolahan data untuk ketiga portofolio diatas menggunakan software R (lihat lebih detail pada Würtz *et al*, [13]).

Berdasarkan data dari Tabel 1 dan Tabel 2, selanjutnya dapat dihitung besarnya nilai *a, b, c* dan *d*, yaitu:

Tabel 1. *Expected return* (mean) untuk ke lima saham

ADHI	UNVR	MNCN	CPIN	ASRI
0,0031	0,0043	0,0032	0,0034	0,0028

Tabel 2. Variansi dan kovariansi untuk ke lima saham

	ADHI	UNVR	MNCN	CPIN	ASRI
ADHI	0,0065	0,0004	0,0014	0,0015	0,0020
UNVR	0,0004	0,0016	0,0006	0,0004	0,0006
MNCN	0,0014	0,0006	0,0062	0,0002	0,0019
CPIN	0,0015	0,0004	0,0002	0,0123	0,0017
ASRI	0,0020	0,0006	0,0019	0,0017	0,0050

$a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu = 0{,}0126$; $b = e^T \Sigma^{-1} \mu = 3{,}1116$; $c = e^T \Sigma^{-1} e = 794{,}9335$; dan $d = \mathrm{ac} - b^2 = 0{,}3711$

Menggunakan nilai–nilai tersebut, maka kurva EF dalam ruang $(\sigma_p^2,\ \mu_p)$ dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (10) yang merupakan persamaan parabola, yaitu:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}\left(c{\mu_p}^2 - 2b\mu_p + a\right)$$
$$= 2142{,}096{\mu_p}^2 - 16{,}77\mu_p + 0{,}034$$

Kurva EF dalam ruang $(\sigma_p\ ,\ \mu_p)$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (14) yang merupakan persamaan hiperbola, yaitu:

$$\frac{\sigma_p^2}{1{,}2580 \times 10^{-3}} - \frac{\left(\mu_p - 3{,}9142 \times 10^{-3}\right)^2}{5{,}8726 \times 10^{-7}} = 1$$

Kurva EF dapat dilihat pada Gambar 5. Selanjutnya dicari portofolio optimal untuk ke tiga model dengan menggunakan persamaan (19), (26) dan (31). Hasilnya dapat dilihat pada pada Tabel 3.

Pada portofolio model *mean-variance*, nilai γ (*risk averse*) adalah ukuran keengganan investor terhadap risiko. Investor yang tidak menyukai risiko akan memilih γ besar, sebaliknya investor yang menyukai risiko akan memilih γ yang paling kecil. Sehingga ketika γ sangat besar, maka sama dengan mencari portofolio *minimum-variance*. Hal ini sudah dibuktikan pada persamaan 32. Pada kasus ini, ketika γ = 10 portfolio *mean-variance* sudah sama dengan portofolio *minimum-variance*. Sehingga otomatis γ > 0 akan menghasilkan portofolio optimal yang sama.

Portofolio optimal yang memberikan risiko paling rendah tentu saja dihasilkan oleh portofolio minimum variance. Alokasi investasi yang harus dilakukan pada model ini adalah 9,33% diinvestasikan pada saham ADHI, sebesar 67,7% pada saham UNVR, sebanyak 8,82% diinvestasikan pada saham MNCN, pada saham CPIN sebesar 5,45% dan sisanya 0,39% pada saham ASRI. Portofolio jenis ini sesuai dengan investor yang tidak menyukai risiko.

Investor yang ingin memaksimalkan sharpe ratio akan memilih portofolio *tangency*. Dapat dilihat pada Tabel 3, bahwa portofolio model ini mempunyai SR paling tinggi dibandingkan portofolio lainnya yaitu sebesar 0,1136. Pada kasus ini investor menanamkan sahamnya sebesar 7,37% pada saham ADHI, sebesar 79,2% pada saham UNVR, pada saham MNCN sebesar 6,28%, pada saham CPIN sebesar 4,93% dan terakhir pada saham AALI sebesr 4,1%.

Berdasarkan Tabel 3 dapat diamati bahwa pada portofolio *mean-variance* semakin besar γ maka portofolio *mean-variance* mendekati portofolio minimum variance. Hal ini sejalan dengan apa yang sudah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Kedudukan ke tiga portofolio pada kurva efisien frontier dapat dilihat pada Gambar 5.

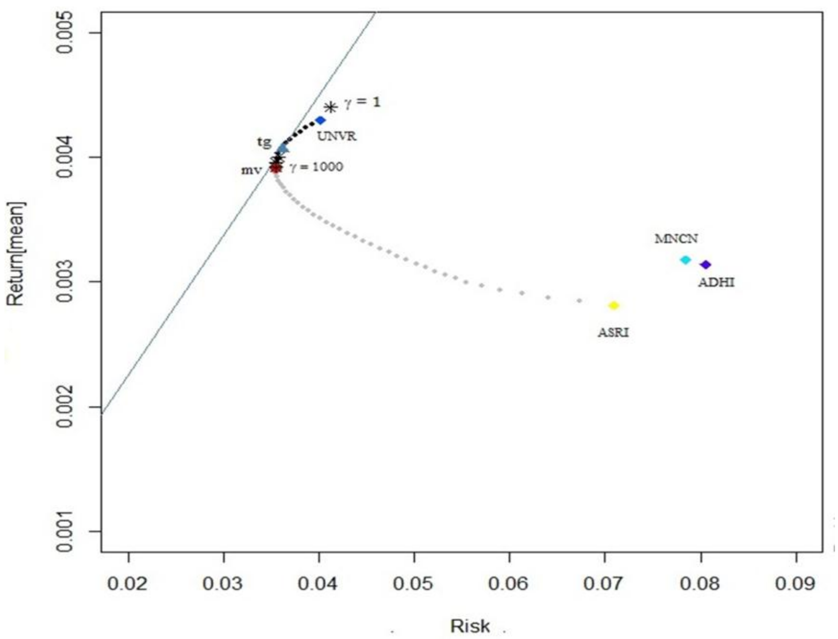
Pada Gambar 5, terlihat kurva efisien frontier digambarkan dengan garis putus–putus, garis singgung (tangency) digambarkan dengan garis lurus beserta titik singgung di w_{tg} (titik segitiga biru). Kurva efisien frontier (EF) menunjukan semua kemungkinan portofolio–portofolio yang paling efisien artinya suatu portofolio yang memiliki tingkat keuntungan paling besar pada tingkat risiko tertentu atau portofolio yang menghasilkan risiko paling kecil pada tingkat keuntungan tertentu (Elton dan Gruber [9]). Oleh karena itu portafolio yang berada di bawah kurva EF adalah portofolio yang tidak efisien sehingga tidak akan dipilih oleh investor.

Portofolio *minimum-variance* digambarkan dengan lingkaran merah sedangkan portofolio *mean-variance* digambarkan dengan lambang (*). Nampak bahwa kedudukan portofolio *mean-variance* bergerak sepanjang kurva EF dari kedudukan portfolio *minimum-variance* (γ paling besar, *risk averse*) terus ke posisi UNVR (γ paling kecil, *risk seeker*).

Portofolio optimal pada model *mean-variance* merupakan perpaduan antara portofolio *minimum-variance* dan portofolio *tangency*. Model ini sangat membantu investor dalam menentukan portofolio optimal, apabila investor tidak menyukai risiko maka dapat menentukan parameter *risk aversion* γ sangat besar. Sebaliknya apabila investor tersebut menyukai risiko maka dapat dipilih *risk aversion* γ

Tabel 3. Bobot, Mean, Risiko dan Sharpe Ratio pada Portofolio *Mean-variance*, *Minimum-Variance* dan Tangency

		Bobot					*Mean*	*Risk*	*Sharpe*
		ADHI	UNVR	MNCN	CPIN	ASRI			
	γ = 1	0,0324	1,0327	0,0092	0,0381	-0.1126	0,0044	0,0412	0,1067
	γ = 5	0,0811	0,7489	0,0724	0,0512	0,0464	0,0040	0,0358	0,1118
Mean-variance	γ = 10	0,0872	0,7134	0,0803	0,0529	0,0662	0,0039	0,0355	0,1099
	γ = 50	0,0920	0,6850	0,0866	0,0542	0,0821	0,0039	0,0355	0,1099
	γ = 100	0,0926	0,6815	0,0874	0,0544	0,0841	0,0039	0,0355	0,1099
	γ = 1000	0,0932	0,6783	0,0881	0,0545	0,0859	0,0039	0,0355	0,1099
Min-Variance		0,0933	0,6779	0,0882	0,0545	0,0861	0,0039	0,0355	0,1099
Tangency		0,0737	0,7920	0,0628	0,0493	0,0222	0,0041	0,0361	0,1136



Gambar 5. Kedudukan portofolio *minimum-variance*, tangency dan *mean-variance* pada kurva efisien frontier

sangat kecil.

Simpulan

Dalam makalah ini telah dirumuskan persamaan kurva efisien frontier pada model portofolio Markowitz. Secara matematis, persamaan kurva efisien frontier dalam konsep *risk-return* (diukur dengan standar deviasi dan mean) berbentuk hiperbola. Selanjutnya portofolio optimal pada model portofolio *mean-variance* merupakan perpaduan antara portofolio *minimum-variance* dan portofolio tangency. Apabila parameter *risk aversion* γ semakin besar menuju tak hingga, maka portofolio *mean-variance* akan sama dengan portofolio *minimum -variance*. Apabila parameter *risk aversion* $\gamma = b$ maka portofolio *mean-variance* akan sama dengan portofolio tangency. Sebagai ilustrasi telah dianalisis lima saham yang diperdagangkan di pasar modal Indonesia. Hasil pengamatan pada data riil ini memperkuat kajian dari aspek teoritisnya

Daftar Pustaka

1. Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7(1), 1952, pp. 77-91.
2. Broadie, M., Computing Efficient Frontiers using Estimated Parameters, *Annals of Operations Research*, 45, 1993, pp. 21–58.
3. Ceria, S., and Stubbs, R. A., Incorporating Estimation Errors into Portfolio Selection: Robust Portfolio Construction, *Journal of Asset Management*, 7, 2006, pp. 109–127.
4. DeMiguel, V. Martin-Utrera, A., and Nogales, F. J., Size Matters: Optimal Calibration of Shrinkage Estimators for Portfolio Selection, *Journal of Banking & Finance*, 37, 2013, pp. 3018–3034.
5. Engels, M., *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz*, Thesis, Universiteit Leiden, Leiden. 2004.
6. Fabozzi, J. F, Kolm, P. N., Pachamanova D. A., and Focardi, F.M., *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007.
7. Green, R. and Hollifield, B., When will *Mean-variance* Efficient Portfolios be Well Diversified, *Journal of Finance*, 47(5), 1992, pp. 1785–1809
8. Michaud, R., The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?, *Financial Analysts Journal*, 45(1), 1989, pp. 31–42
9. Elton, E. J., and Gruber, M. J., *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 9th Edition*, John Wiley & Sons, New York, 2014.
10. Bailey, D. H., and Lopez de Prado, M., The Sharpe Ratio Efficient Frontier, *Journal of Risk*, 15(2), 2012, Available at SSRN:http://ssrn.com/abstract=1821643 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1821643.
11. Merton, R.C., An Analytic Derivation of the Efficient Frontier, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4), 1972, pp. 1851–1872.
12. Christie, S., *Is the Sharpe Ratio Useful in Asset Allocation*?, MAFC Research Papers No.31, Applied Finance Centre, Macquarie University, 2005.
13. Sharpe, W. F., The Sharpe Ratio, *Journal of Portfolio Management*, 21(1), 1994, 49–58.
14. Würtz. D *et al.*, *Portfolio Optimization with R/Rmetrics*, Rmetrics Association and Finance Online Publishing, Zurich, 2015.