

# MODEL SIMULTAN DAN *DECOUPLED* UNTUK PENYELESAIAN PROBLEM INTEGRASI PRODUKSI- PERSEDIAAN-DISTRIBUSI-PERSEDIAAN

**Annisa Kesy Garside**

Fakultas Teknik, Jurusan Teknik Industri, Universitas Muhammadiyah Malang

Jl. Bandung 1, Malang 65113

Email: annisa\_garside@yahoo.com

## ABSTRAK

Tuntutan untuk mengurangi biaya-biaya dan persediaan sepanjang *supply chain*, menyebabkan pengambilan keputusan yang lebih terintegrasi diantara fungsi produksi dan distribusi menjadi sangat penting. Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan model simultan dan *decoupled* untuk menyelesaikan problem integrasi produksi-persediaan-distribusi-persediaan. Model simultan dan *decoupled* diformulasikan sebagai *Mixed Integer Programming* (MIP) dengan fungsi tujuan meminimalkan total biaya yang meliputi biaya produksi tetap dan variabel, biaya persediaan di pabrik dan *Distribution Center* (DC) serta biaya pengiriman secara *reguler* dan *overtime*. Dengan menggunakan kedua model untuk menyelesaikan problem integrasi produksi-persediaan-distribusi-persediaan, diperoleh total biaya model simultan lebih kecil dibanding model *decoupled*.

**Kata kunci:** koordinasi *supply chain*, integrasi produksi-persediaan-distribusi-persediaan, *mixed integer programming*, pengiriman langsung, pendekatan *decoupled*.

## ABSTRACT

*The necessity to cut costs and inventory along supply chain makes a more integrated decision between production and distribution functions becomes very important. The purpose of this research is to develop a simultaneous and decoupled optimization model to solve integrated production-inventory-distribution-inventory problem. The model is formulated as Mixed Integer Programming (MIP) with objective function minimizing total cost which covers fixed and variable production cost, plant and Distribution Center (DC) inventory cost, regular and overtime delivery cost. As the conclusion of the two models used to solve integrated production-inventory-distribution-inventory problem, the total cost of simultan model is smaller than the decoupled one.*

**Keywords:** *supply chain coordination, integrated production-inventory-distribution-inventory problem, mixed integer programming, direct shipment, decoupled approach.*

## 1. PENDAHULUAN

Persaingan dan pasar global telah mendorong perusahaan untuk mengembangkan *supply chain* yang dapat merespon kebutuhan konsumen secara cepat. Supaya tetap kompetitif, perusahaan-perusahaan tersebut harus mengurangi biaya operasi, mengurangi tingkat persediaan di sepanjang *supply chain* dan secara terus-menerus meningkatkan pelayanan ke konsumen. Chen (2004) menyatakan bahwa pengurangan persediaan sepanjang *supply chain* akan membawa ke hubungan yang lebih dekat diantara fungsi produksi dan distribusi. Sebagai akibatnya perusahaan harus beralih dari pengambilan keputusan yang bersifat terpisah menjadi menjadi terkoordinasi dan terintegrasi diantara fungsi-fungsi yang ada (Thomas dan Griffin, 1996).

Sarmiento dan Nagi (1999) membagi model integrasi produksi-distribusi menjadi tiga kategori yaitu: (1) Distribusi-Persediaan (2) Persediaan-Distribusi-Persediaan (3) Produksi-Persediaan–Distribusi-Persediaan (PIPPDP). Model yang membahas PIPDP untuk multi produk yang disuplai dari multi pabrik telah dibahas oleh Blumenfeld *et al.* (1985) dan Benjamin (1989), namun kedua model hanya mempertimbangkan satu periode perencanaan, alokasi pengiriman masih dilakukan dari pabrik ke depot, serta tidak memasukkan batasan-batasan yang berkaitan dengan jenis, jumlah, kapasitas angkut dan waktu yang dimiliki kendaraan. Sedangkan model yang mempertimbangkan pengiriman secara langsung dari pabrik ke *Distribution Center* (DC) untuk multi periode dan multi produk telah dikembangkan oleh Barbarasoglu dan Ozgur (1999) dan Haq *et al.* (1991), namun kedua model ini hanya melibatkan satu pabrik. Kedua model ini sama dengan model yang dikembangkan oleh Blumenfeld *et al.* (1985) dan Benjamin (1989) dimana keputusan hanya pada kuantitas produk yang harus dikirim dari pabrik ke DC ataupun dari DC ke konsumen tetapi tidak menentukan kendaraan apa yang harus digunakan untuk mengirim produk tersebut. Selanjutnya Chandra dan Fisher (1999) dan Fumero dan Vercellis (1999) mengembangkan model PIPDP untuk multi produk dengan mempertimbangkan batasan-batasan yang dimiliki kendaraan dan pengiriman ke masing-masing DC melalui suatu rute. Lei *et al.* (2006) mengembangkan model yang sama dengan Chandra dan Fisher (1999) dan Fumero Vercellis (1999), namun untuk satu produk. Selain itu Lei *et al.* (2006) juga mengembangkan model untuk pengiriman langsung dari pabrik ke DC pada fase satu dari metodologi dua fase yang dikembangkan.

Kondisi saat ini menuntut perusahaan tidak hanya membuat produk murah dan berkualitas tetapi juga bervariasi (Pujawan, 2005). Oleh karena itu perusahaan berusaha mengembangkan dan melakukan diversifikasi produk secara terus menerus, dengan tetap menjaga efisiensi. Dengan tuntutan efisiensi tersebut maka perusahaan akan memiliki banyak pabrik, dengan tiap pabrik dikhususkan membuat sejumlah produk tertentu (Dhaenens dan Finke, 2001). Berdasarkan kondisi tersebut, maka penelitian ini bertujuan mengembangkan model untuk menyelesaikan Problem Integrasi Produksi-Persediaan-Distribusi-Persediaan (PIPPDP) untuk banyak produk yang dipenuhi dari banyak pabrik dengan pengiriman dilakukan bersamaan untuk beberapa produk dan langsung dari pabrik ke DC serta mempertimbangkan kapasitas kendaraan. Model dikembangkan pada dua kondisi pengambilan keputusan yaitu model simultan (pengambilan keputusan dilakukan terkoordinasi) dan *decoupled* (pengambilan keputusan secara terpisah).

Mengambil celah kosong yang belum dibahas pada penelitian-penelitian sebelumnya, maka penelitian ini akan menambah jumlah model untuk penyelesaian PIPDP. Penerapan model ini pada sebuah perusahaan diharapkan mampu meningkatkan kemampuan sebuah *Supply Chain* perusahaan dalam memenuhi permintaan konsumen secara bersama-sama dengan biaya seminimal mungkin dan meningkatkan koordinasi produksi-distribusi yang berlangsung dalam suatu *Supply Chain* sehingga memberikan keuntungan bagi semua pihak.

## 2. KARAKTERISTIK PROBLEM INTEGRASI PRODUKSI-PERSEDIAAN DISTRIBUSI-PERSEDIAAN

Karakteristik problem produksi–persediaan–distribusi–persediaan yang dipertimbangkan dalam model ini adalah:

- Sebuah *Supply Chain* yang terdiri dari banyak pabrik yang akan mensuplai berbagai jenis produk ke banyak DC atau gudang.

- Setiap pabrik memproduksi sebanyak  $z$  produk untuk memenuhi permintaan konsumen sebanyak  $n$  selama  $T$  periode. Permintaan DC ke- $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) untuk produk  $k$  ( $k = 1, \dots, z$ ) dalam periode  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) adalah  $D_{jk}(t)$ .
- Tiap pabrik dapat membangun persediaan untuk memenuhi permintaan DC.
- Setiap pabrik memiliki kapasitas waktu untuk produksi; kapasitas produksi; kapasitas maksimum persediaan; persediaan minimum yang diinginkan; waktu produksi, biaya *set up*, biaya produksi dan biaya simpan untuk membuat masing-masing produk.
- Pabrik memiliki sejumlah kendaraan dengan kapasitas dan kecepatan (dalam penelitian ini digambarkan dengan waktu tempuh) yang berbeda-beda. Selain itu setiap kendaraan memiliki biaya pengiriman dan kapasitas waktu pengiriman.
- Lokasi DC atau gudang tersebar dalam area yang cukup luas sehingga membutuhkan waktu yang cukup lama untuk menempuh perjalanan dari pabrik ke DC/gudang.
- DC dapat menyimpan sejumlah persediaan di akhir tiap periode dengan harapan dapat memenuhi permintaan konsumen lebih baik. Oleh karena itu, DC memiliki beberapa parameter yang berkaitan dengan persediaan diantaranya kapasitas maksimum persediaan; persediaan minimum tiap produk pada tiap periode yang diinginkan; dan biaya simpan untuk tiap produk.

Asumsi-asumsi yang akan digunakan dalam penyelesaian problem integrasi produksi–persediaan–distribusi-persediaan dalam penelitian ini meliputi:

1. Permintaan tiap DC diketahui pada tiap periode dan dapat dipenuhi tanpa *backlog*.
2. *Lead time* produksi dan pengiriman diabaikan.
3. Biaya *set up* per produk tidak tergantung jumlah yang diproduksi.
4. Produk dapat dikonsolidasikan dengan produk lain dalam satu kendaraan.
5. Tiap pabrik memiliki kendaraan yang selalu tersedia setiap saat.
6. Tiap kendaraan kembali ke pabriknya pada akhir tiap periode.
7. Tiap kendaraan dapat melakukan perjalanan lebih dari satu kali dalam satu periode.
8. Biaya pengiriman tidak tergantung volume tetapi jumlah dan waktu pengiriman.
9. Kekurangan waktu untuk melakukan pengiriman dari pabrik ke DC dengan kapasitas kendaraan *reguler* ditutupi dengan menambah waktu (*overtime*).

### 3. PENGEMBANGAN MODEL SIMULTAN UNTUK PROBLEM INTEGRASI PRODUKSI-PERSEDIAAN-DISTRIBUSI-PERSEDIAAN

Parameter dalam model ini adalah:

- $I$  : Himpunan pabrik  
 $J$  : Himpunan DC  
 $T$  : Himpunan dari periode waktu  
 $K$  : Himpunan produk  
 $V(i)$  : Himpunan kendaraan yang dimiliki oleh pabrik  $i$

#### Produksi

- $a_{i,k}(t)$  : Biaya produksi satu unit produk ke- $k$  di pabrik  $i$  pada periode ke- $t$   
 $S_{i,k}(t)$  : Biaya tetap yang diperlukan untuk set up produk ke- $k$  di pabrik ke- $i$  pada periode ke- $t$   
 $B_i(t)$  : Kapasitas waktu yang tersedia di pabrik ke- $i$  selama periode ke- $t$  (jam)  
 $P_{i,k}^{max}$  : Kapasitas produksi maksimum untuk membuat produk ke- $k$  pada pabrik  $i$  pada tiap periode  
 $t_{i,k}$  : Waktu yang dibutuhkan untuk membuat satu unit produk ke- $k$  di pabrik ke- $i$

**Persediaan**

- $h_{i,k}(t)$  : Biaya simpan per unit produk ke- $k$  di pabrik  $i$  selama periode  $t$
- $h_{j,k}(t)$  : Biaya simpan per unit produk ke- $k$  di DC ke- $j$  selama periode  $t$
- $W_i$  : Kapasitas tempat penyimpanan di pabrik ke- $i$  (dalam satuan volume)
- $I_{i,k}^{min}$  : Persediaan akhir minimum yang diinginkan (*safety stock*) produk ke- $k$  di pabrik  $i$
- $W_j$  : Kapasitas tempat penyimpanan di DC ke- $j$  (dalam satuan volume)
- $I_{j,k}^{min}$  : Persediaan akhir minimum yang diinginkan (*safety stock*) produk ke- $k$  di DC ke- $j$

**Transportasi (distribusi)**

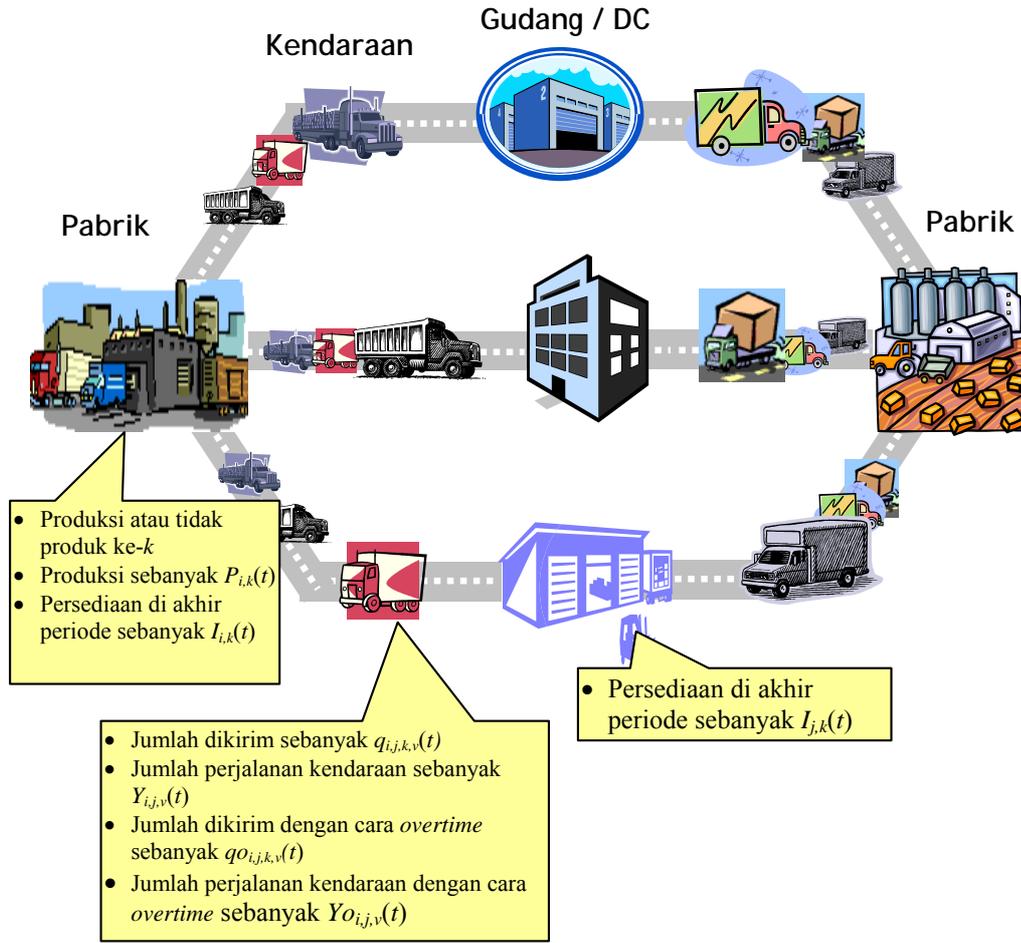
- $c_v$  : Biaya pengiriman untuk *transporter*  $v$  (per jam)
- $co_v$  : Biaya pengiriman untuk *transporter*  $v$  dengan cara *overtime* (per jam)
- $v_k$  : volume produk ke- $k$  tiap satu unit
- $C_v$  : Kapasitas angkut maksimum untuk *transporter*  $v$  (dalam satuan volume)
- $T_v(t)$  : Waktu yang tersedia untuk *transporter*  $v$  dalam melaksanakan operasi selama periode  $t$
- $t_{i,j}^v$  : Waktu perjalanan dari pabrik  $i$  ke DC  $j$  dengan menggunakan *transporter*  $v$  (dalam satuan jam)
- $D_{i,k}(t)$  : Permintaan untuk produk ke- $k$  di DC ke- $j$  pada periode ke- $t$

Berdasarkan karakteristik permasalahan dan parameter yang telah didefinisikan maka variabel keputusan dalam model ini dinyatakan sebagai berikut:

- $y_{i,j}^v(t)$  : jumlah perjalanan dengan pengiriman langsung dari pabrik  $i$  menuju DC ke- $j$  oleh *transporter*  $v$  dalam periode ke- $t$
- $yo_{i,j}^v(t)$  : jumlah perjalanan dengan pengiriman langsung dari pabrik  $i$  menuju DC ke- $j$  oleh *transporter*  $v$  dengan cara *overtime* dalam periode ke- $t$
- $x_{i,k}(t) = 1$ , jika pabrik  $i$  harus memproduksi produk ke- $k$  pada periode  $t$ ,  
0, jika  $P_{i,k}(t) > 0$
- $q_{i,j,k}^v(t)$  : kuantitas produk ke- $k$  yang dikirimkan dari pabrik  $i$  menuju DC ke- $j$  oleh *transporter*  $v$  dalam periode ke- $t$  (dalam satuan unit)
- $qo_{i,j,k}^v(t)$  : Kelebihan kuantitas produk ke- $k$  yang dikirimkan dari pabrik  $i$  menuju DC ke- $j$  oleh *transporter*  $v$  dengan cara *overtime* dalam periode ke- $t$  (dalam satuan unit)
- $P_{i,k}(t)$  : kuantitas produk ke- $k$  yang diproduksi oleh pabrik  $i$  selama periode ke- $t$  (dalam satuan unit)
- $I_{i,k}(t)$  : persediaan akhir produk ke- $k$  pada akhir periode ke- $t$  di pabrik ke- $i$  (dalam satuan unit)
- $I_{j,k}(t)$  : persediaan akhir produk ke- $k$  pada akhir periode ke- $t$  di DC ke- $j$  (dalam satuan unit)

Gambar 1 menunjukkan problem integrasi produksi-persediaan-distribusi-persediaan yang terjadi untuk kondisi dua pabrik dan tiga DC dan variabel keputusan yang harus diambil pada masing-masing pabrik, kendaraan dan gudang/DC.

Dari variabel keputusan tersebut maka model ini bertujuan untuk menentukan rencana produksi agregat dan disagregat sehingga output yang diperoleh langsung berupa keputusan produk apa yang harus dibuat pada masing-masing pabrik dan berapa jumlahnya untuk memenuhi permintaan keseluruhan DC. Selanjutnya produk tersebut akan dikirimkan ke masing-masing DC sesuai dengan jenis dan jumlahnya dengan menggunakan kendaraan yang dimiliki pabrik. Dengan mempertimbangkan kapasitas angkut dan kecepatan yang berbeda pada tiap kendaraan serta produk dapat dikonsolidasikan dalam satu kali pengiriman maka variabel keputusan berikutnya adalah menentukan jumlah perjalanan dari masing-masing pabrik ke masing-masing DC dengan cara *reguler* dan *overtime*.



**Gambar 1. Gambaran permasalahan untuk dua pabrik dan tiga DC**

Model diformulasikan sebagai *Mixed Integer Programming* (MIP) dengan fungsi tujuan dan fungsi pembatas sebagai berikut.

### Fungsi Tujuan

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} a_{i,k}(t) P_{i,k}(t) + \sum_{t=0}^1 \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{i,k}(t)}{2} (P_{i,k}(t) + I_{i,k}(t) + I_{i,k}^{\min}) + \\
 & \sum_{t=2}^T \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{i,k}(t)}{2} (P_{i,k}(t) + I_{i,k}(t-1) + I_{i,k}(t)) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} S_{i,k}(t) x_{i,k}(t) + \\
 & \sum_{t=0}^1 \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \frac{h_{j,k}(t)}{2} \left( \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) + I_{j,k}(t) + I_{j,k}^{\min} \right) + \\
 & \sum_{t=2}^T \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \frac{h_{j,k}(t)}{2} \left( \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) + I_{j,k}(t-1) + I_{j,k}(t) \right) + \\
 & \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} \sum_{j \in J} c_v t_{ij}^v y_{ij}^v(t) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} \sum_{j \in J} co_v t_{ij}^v yo_{ij}^v(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

*Term* pertama menunjukkan total biaya produksi variabel yang diperoleh dari perkalian antara kuantitas produk ke- $k$  yang diproduksi pabrik ke- $i$  dikalikan dengan biaya produksi satu unit produk ke- $k$  di pabrik  $i$ . *Term* kedua menyatakan total biaya persediaan di pabrik yang merupakan perkalian dari biaya simpan dengan jumlah persediaan pada akhir periode kesatu sedangkan *Term* ketiga menyatakan total biaya persediaan untuk periode kedua dan seterusnya. *Term* keempat menyatakan total biaya *set up* produksi yang diperlukan untuk membuat produk di pabrik. *Term* kelima merupakan total biaya persediaan di DC. *Term* keenam menyatakan total biaya pengiriman secara *reguler* sedangkan *term* ketujuh menyatakan total biaya pengiriman yang dilakukan dengan cara *overtime*.

### Fungsi Pembatas

1. Jumlah waktu produksi untuk semua produk ke- $k$  pada setiap periode waktu tidak melebihi kapasitas waktu produksi di masing-masing pabrik

$$\sum_k t_{i,k} \cdot P_{i,k}(t) \leq B_i(t), \forall i \in I, t \in T \quad (2)$$

2. Jumlah produk ke- $k$  yang dibuat di pabrik  $i$  pada periode  $t$  tidak boleh melebihi kapasitas produksi maksimum di pabrik ke- $i$ , jika pabrik  $i$  harus memproduksi produk ke- $k$  pada periode ke- $t$  ( $x_{i,k}(t) = 1$ ).

$$P_{i,k}(t) \leq P_{i,k}^{max} x_{i,k}(t), \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (3)$$

3. Keseimbangan persediaan di pabrik

$$I_{i,k}(t) = I_{i,k}(t-1) + P_{i,k}(t) - \sum_{j \in J, v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) - \sum_{j \in J, v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t), \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (4)$$

4. Keseimbangan persediaan di DC

$$I_{j,k}(t) = I_{j,k}(t-1) + \sum_{i \in I, v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{i \in I, v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) - D_{j,k}(t), \forall j \in J, k \in K, t \in T \quad (5)$$

5. Minimum persediaan diakhir periode ke- $t$  untuk produk ke- $k$  pada pabrik ke- $i$

$$I_{i,k}(t) \geq I_{i,k}^{min}, \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (6)$$

6. Minimum persediaan diakhir periode ke- $t$  untuk produk ke- $k$  pada DC ke- $j$

$$I_{j,k}(t) \geq I_{j,k}^{min}, \forall j \in J, k \in K, t \in T \quad (7)$$

7. Kapasitas tempat penyimpanan di pabrik ke- $i$

$$\sum_{k \in K} I_{i,k}(t) v_k \leq W_i, \forall i \in I, t \in T \quad (8)$$

8. Kapasitas tempat penyimpanan di DC ke- $j$

$$\sum_{k \in K} I_{j,k}(t) v_k \leq W_j, \forall j \in J, t \in T \quad (9)$$

9. Kapasitas angkut tiap kendaraan baik dengan pengiriman *reguler* / *overtime*

$$\sum_{k \in K} q_{i,j,k}^v(t) v_k \leq C_v \cdot y_{i,j}^v(t), \forall i \in I, v \in V(i), j \in J, t \in T \quad (10)$$

$$\sum_{k \in K} qo_{i,j,k}^v(t) v_k \leq C_v \cdot yo_{i,j}^v(t), \forall i \in I, v \in V(i), j \in J, t \in T \quad (11)$$

10. Kapasitas waktu yang dimiliki kendaraan dengan pengiriman *reguler*

$$\sum_{j \in J} t_{i,j}^v \cdot y_{i,j}^v(t) \leq T_v(t), \forall i \in I, v \in V(i), t \in T \quad (12)$$

$$11. y_{i,j}^v(t) \geq 0, y_{o_{i,j}^v}(t) \geq 0 \text{ dan bilangan integer} \quad (13)$$

$$12. x_{i,k}(t) \in \{0, 1\} \quad (14)$$

$$13. q_{i,j,k}^v(t) \geq 0, q_{o_{i,j,k}^v}(t) \geq 0, P_{i,k}(t) \geq 0, I_{i,k}(t) \geq 0, I_{j,k}(t) \geq 0 \quad (15)$$

#### 4. PENGEMBANGAN MODEL *DECOUPLED* UNTUK PROBLEM INTEGRASI PRODUKSI-PERSEDIAAN-DISTRIBUSI-PERSEDIAAN

Pendekatan *Classical Decoupled* seperti dijelaskan dalam Chandra dan Fisher (1994) dan Fumero dan Vercellis (1999) merupakan pendekatan umum yang biasanya digunakan oleh sebuah industri. Pendekatan ini kadang-kadang disebut juga dengan prosedur dua fase. Pada fase pertama ditentukan rencana produksi yang dapat meminimalkan biaya produksi dan persediaan di pabrik dengan pembatas berupa pemenuhan agregat permintaan untuk semua DC dalam satu periode. Berdasarkan rencana produksi yang telah dibuat maka selanjutnya fase kedua akan menentukan rencana pengiriman.

##### Fase 1 (FPROD): Penentuan Rencana Produksi

Model fase satu menentukan berapa banyak kuantitas produksi untuk masing-masing produk, pabrik mana yang harus membuat produk-produk tersebut pada masing-masing periode, dan persediaan akhir untuk masing-masing produk. Model *Mixed Integer Programming* (MIP) dinyatakan sebagai berikut:

##### Fungsi Tujuan

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} a_{i,k}(t) P_{i,k}(t) + \sum_{t=0}^1 \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{i,k}(t)}{2} (P_{i,k}(t) + I_{i,k}(t) + I_{i,k}^{\min}) + \\ & \sum_{t=2}^T \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{i,k}(t)}{2} (P_{i,k}(t) + I_{i,k}(t-1) + I_{i,k}(t)) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} S_{i,k} x_{i,k}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

##### Fungsi Pembatas

Persamaan (2), (3), (6), (8), (14) dan (15) ditambah pembatas mengenai keseimbangan persediaan di pabrik yang dinyatakan dengan:

$$I_{i,k}(t) = I_{i,k}(t-1) + P_{i,k}(t) - Q_{i,k}(t), \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (17)$$

dengan:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} Q_{i,k}(t) &= \sum_{j \in J} DI_{j,k}(t) = \sum_{j \in J} D_{j,k}(t) + I_{j,k}^{\min}(t) \text{ untuk } t = 1 \text{ dan} \\ \sum_{i \in I} Q_{i,k}(t) &= \sum_{j \in J} D_{j,k}(t) \text{ untuk } t = 2, 3, \dots, T \end{aligned} \quad (18)$$

dimana:

$Q_{i,k}(t)$  : kuantitas produk ke- $k$  yang dikirimkan dari pabrik ke- $i$  pada periode ke- $t$

$DI_{j,k}(t)$  : permintaan yang sudah ditambahkan dengan minimum persediaan untuk produk ke- $k$  di DC ke- $j$  pada periode ke- $t$ .

Persamaan (17) yang menyatakan fungsi keseimbangan di pabrik dimodifikasi dari persamaan (4) dengan menghilangkan informasi kendaraan dan DC sehingga variabel keputusan  $q_{i,j,k}^v(t)$  dan  $q_{o_{i,j,k}^v}(t)$  menjadi  $Q_{i,k}(t)$ .

Pada karakteristik problem integrasi produksi-distribusi yang dibahas mengijinkan adanya persediaan minimum di DC, maka  $D_{j,k}(t)$  ditambahkan dengan minimum persediaan produk ke- $k$  di DC ke- $j$  ( $I_{j,k}^{min}(t)$ ) pada periode kesatu untuk menjamin  $Q_{i,k}(t)$  dan  $P_{i,k}(t)$  dapat memenuhi permintaan dan persediaan di DC. Sedangkan pada periode kedua dan seterusnya maka  $Q_{i,k}(t)$  hanya mempertimbangkan  $D_{j,k}(t)$  saja.

Pada pembahasan sebelumnya, model simultan juga mengijinkan persediaan di pabrik dan DC. Persamaan (4) dan (6) menunjukkan bahwa jumlah produksi pabrik akan sama dengan jumlah pengiriman *reguler*, *overtime* dan persediaan (minimal sejumlah  $I_{i,k}^{min}$ ). Demikian pula pada sisi DC ditunjukkan pada persamaan (5) dan (7). Diharapkan dengan melakukan integrasi produksi-distribusi secara simultan maka pabrik dan DC dapat meminimalkan persediaan dengan memperhatikan batasan-batasan diantaranya kapasitas produksi, kapasitas angkut kendaraan, kapasitas penyimpanan di pabrik dan kapasitas penyimpanan di DC serta biaya-biaya yang ada.

**Fase 2 (FDIST): Penentuan jumlah yang harus dikirim dari pabrik ke masing-masing DC dengan menggunakan kendaraan yang dimiliki**

Pada fase dua akan ditentukan berapa banyak persediaan akhir masing-masing produk di tiap DC dan variabel-variabel yang berkaitan dengan aktivitas pengiriman seperti berapa kuantitas produk yang harus dikirimkan dan berapa kali kendaraan harus menempuh perjalanan dalam satu periodenya. Selanjutnya problem pada fase dua dimodelkan sebagai *Mixed Integer Programming* (MIP) dengan fungsi tujuan dan pembatas sebagai berikut:

**Fungsi Tujuan**

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{t=0}^1 \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{j,k}(t)}{2} \cdot \left( \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) + I_{j,k}(t) + I_{j,k}^{min} \right) + \\ & \sum_{t=2}^T \sum_{j \in I} \sum_{k \in K} \frac{h_{j,k}(t)}{2} \cdot \left( \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) + I_{j,k}(t-1) + I_{j,k}(t) \right) + \\ & \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} \sum_{j \in J} c_v t_{ij}^v y_{ij}^v(t) + \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{v \in V(i)} \sum_{j \in J} co_v t_{ij}^v yo_{ij}^v(t) \end{aligned} \tag{19}$$

**Fungsi Pembatas**

Persamaan (5), (7), (9), (10), (11), (12), (13) dan (15), ditambah pembatas mengenai sinkronisasi jumlah pengiriman ke semua DC dengan jumlah produksi dari pabrik untuk masing-masing produk

$$\sum_{j \in J} \sum_{v \in V(i)} q_{i,j,k}^v(t) + \sum_{j \in J} \sum_{v \in V(i)} qo_{i,j,k}^v(t) \leq Q_{i,k}(t), \forall i \in I, k \in K, t \in T \tag{20}$$

Persamaan (20) merupakan pembatas yang menjembatani hasil output model fase satu masuk sebagai input model fase dua.

**5. CONTOH NUMERIK**

Contoh numerik untuk penerapan model diatas adalah problem yang memiliki karakteristik: 2 pabrik yang dapat memproduksi 2 jenis produk, tiap pabrik memiliki dua kendaraan, jumlah DC sebanyak 5 dan horison perencanaan selama 3 periode. Melalui prosedur *generate* yang telah ditentukan diperoleh data-data pada Tabel 1- 4.

**Tabel 1. Data biaya *set up*, biaya produksi, biaya simpan, kapasitas produksi maksimum, waktu produksi dan minimum persediaan di pabrik**

Pabrik	Produk	Periode	Biaya <i>set up</i>	Kapasitas produksi maks.	Biaya produksi /unit	Biaya simpan /unit	Wkt produksi jam/unit	Min. persediaan
P1	I1	T1	1845466	3089	7500	750	0,005	333
P1	I1	T2	1845466	3758	7500	750	0,005	333
P1	I1	T3	1845466	4701	7500	750	0,005	333
P1	I2	T1	1605202	4355	4500	450	0,003	325
P1	I2	T2	1605202	4344	4500	450	0,003	325
P1	I2	T3	1605202	4423	4500	450	0,003	325
P2	I1	T1	2391661	3089	4500	450	0,003	325
P2	I1	T2	2391661	3758	4500	450	0,003	333
P2	I1	T3	2391661	4701	4500	450	0,003	333
P2	I2	T1	1632466	4355	5000	500	0,0035	325
P2	I2	T2	1632466	4344	5000	500	0,0035	325
P2	I2	T3	1632466	4423	5000	500	0,0035	325

**Tabel 2. Data maksimum penyimpanan/persediaan pabrik, kapasitas angkut kendaraan, biaya pengiriman *reguler* dan *overtime***

Pabrik	Maks. persediaan pabrik	Waktu produksi (jam/periode)	Kendaraan	Kapasitas angkut	Biaya pengiriman/jam	Biaya pengiriman <i>overtime</i> /jam
P1	1792	48	V1	985	98500	147750
P1			V2	1155	115500	173250
P2	1792	48	V3	1655	165500	248250
P2			V4	1330	133000	199500

**Tabel 3. Data permintaan, minimum persediaan dan biaya simpan produk di tiap DC**

DC	Produk	Periode	Permintaan	Biaya simpan/unit	Min. persediaan
D1	I1	T1	491	999	333
D1	I2	T1	398	836	265
D2	I1	T1	134	993	152
D2	I2	T1	975	817	325
D3	I1	T1	603	749	201
D3	I2	T1	937	591	313
D4	I1	T1	301	868	279
D4	I2	T1	334	503	300
D5	I1	T1	793	802	265
D5	I2	T1	630	607	283
D1	I1	T2	975	999	333
D1	I2	T2	795	836	265
D2	I1	T2	343	993	152
D2	I2	T2	974	817	325
D3	I1	T2	568	749	201
D3	I2	T2	140	591	313
D4	I1	T2	624	868	279

DC	Produk	Periode	Permintaan	Biaya simpan/unit	Min. persediaan
D4	I2	T2	861	503	300
D5	I1	T2	315	802	265
D5	I2	T2	496	607	283
D1	I1	T3	997	999	333
D1	I2	T3	327	836	265
D2	I1	T3	455	993	152
D2	I2	T3	363	817	325
D3	I1	T3	506	749	201
D3	I2	T3	889	591	313
D4	I1	T3	835	868	279
D4	I2	T3	899	503	300
D5	I1	T3	741	802	265
D5	I2	T3	847	607	283

**Tabel 4. Waktu perjalanan yang ditempuh kendaraan dari pabrik ke DC**

Pabrik	DC	Kendaraan	Waktu kendaraan tersedia (jam/periode)	Waktu tempuh (jam)
P1	D1	V1	48	3,36
P1	D2	V1		1,44
P1	D3	V1		3,75
P1	D4	V1		2,24
P1	D5	V1		3,21
P1	D1	V2	48	1,55
P1	D2	V2		2,28
P1	D3	V2		2,51
P1	D4	V2		2,19
P1	D5	V2		1,02
P2	D1	V3	48	3,83
P2	D2	V3		2,92
P2	D3	V3		2,71
P2	D4	V3		2,74
P2	D5	V3		2,59
P2	D1	V4	48	2,72
P2	D2	V4		3,43
P2	D3	V4		2,86
P2	D4	V4		2,65
P2	D5	V4		2,96

Penyelesaian model simultan dan *decoupled* untuk problem diatas dilakukan menggunakan software LINGO yang dijalankan pada Prosesor Intel Celeron 1500 Mhz dengan memori 240 MB RAM. Penyelesaian memberikan solusi global optimal dengan total biaya sebesar Rp 150,785.200,- untuk model simultan, Rp 128.384.800,- untuk *decoupled* produksi dan Rp 22.551.130,- untuk *decoupled* distribusi. Berdasarkan output *running* tersebut diperoleh solusi seperti ditunjukkan pada Tabel 5-7.

Tabel 5 memberikan informasi jumlah produksi dan persediaan untuk pabrik. Informasi pertama yang diperoleh adalah keputusan pabrik memproduksi atau tidak sebuah produk dalam suatu periode tertentu. Dari Tabel 5 dapat dilihat bahwa P1 akan membuat produk I2 dan sebaliknya P2 akan membuat produk I1 selama kurun waktu tiga periode. Informasi kedua adalah berapa banyak produk yang harus dibuat, sebagai contoh pada periode satu pabrik 1 harus

membuat produk I1 sebanyak 1129 unit dan 3089 unit untuk pabrik 2 dengan model simultan. Informasi ketiga yang diperoleh adalah jumlah persediaan masing-masing produk dimasing-masing pabrik, sebagai contoh jumlah persediaan di akhir periode kesatu untuk produk I1 adalah sebanyak 333 unit di pabrik P1 dengan model simultan.

**Tabel 5. Jumlah produksi dan persediaan di masing-masing pabrik (dalam unit) dengan menggunakan model simultan dan *decoupled***

Pabrik	Produk	Periode	Keputusan produksi	Simultan		<i>Decoupled</i>	
				Jumlah produksi	Persediaan pabrik	Jumlah produksi	Persediaan pabrik
P1	1	1	√	1129	333	1129	333
		2	-	-	333	-	333
		3	-	-	333	-	333
	2	1	√	4355	325	4355	325
		2	√	3126	325	3266	325
		3	√	3325	325	3325	325
P2	1	1	√	3089	333	3089	333
		2	√	3280	333	2825	333
		3	√	3079	333	3534	333
	2	1	√	1195	<b>465*</b>	1055	325
		2	-	-	325	-	325
		3	-	-	325	-	325
<b>Jumlah</b>				22578	4088	22578	3948

\* Cetak tebal berarti persediaan akhir periode lebih besar dari minimum persediaan

Sedangkan informasi untuk DC dengan melihat solusi  $q_{i,j,k}^v(t)$  dan  $qo_{i,j,k}^v(t)$  adalah kuantitas pengiriman serta pabrik dan kendaraan yang melakukan pengiriman. Dari Tabel 6 (model simultan) dapat dilihat permintaan D1 untuk produk I1 dipenuhi pabrik P1 dengan menggunakan kendaraan V2 sebanyak 268 unit dan pabrik P2 dengan menggunakan kendaraan V4 sebanyak 556 unit pada periode kesatu. Persediaan untuk masing-masing produk pada akhir periode di level DC juga dapat diketahui dengan mudah, sebagai contoh D1 akan menyimpan 333 unit produk I1 dan 265 unit produk I2 pada akhir periode kesatu dengan model simultan. Selain itu model simultan dan *decoupled* juga memberikan informasi lebih detail mengenai jumlah perjalanan yang harus dilakukan oleh masing-masing kendaraan melalui solusi jumlah perjalanan secara reguler dan *overtime* ( $y_{i,j}^v(t)$  dan  $yo_{i,j}^v(t)$ ).

**Tabel 6. Pemenuhan permintaan dan persediaan di masing-masing DC (dalam unit) dengan model simultan**

DC	Produk	Periode	Permintaan	Kuantitas kirim	Dari pabrik	Dengan kendaraan	Persediaan DC	Min. persediaan
D1	1	1	491	268	P1	V2	333	333
		2	975	556	P2	V4		
		3	997	975	P2	V4		
	2	1	398	663	P1	V2	265	265
		2	795	795	P1	V2	265	265
		3	327	327	P1	V2	265	265
D2	1	1	134	286	P1	V1	152	152
		2	343	798	P2	V4	<b>607*</b>	152
		3	455	-	-	-	152	152
	2	1	975	1300	P1	V1	325	325
		2	974	974	P1	V1	325	325
		3	363	363	P1	V1	325	325
D3	1	1	603	804	P2	V4	201	201
		2	568	568	P2	V4	201	201
		3	506	506	P2	V4	201	201
	2	1	937	96	P2	V4	313	313
		2	140	1154	P1	V2	313	313
		3	889	140	P2	V4	313	313
D4	1	1	301	889	P1	V2	313	313
		2	624	580	P2	V4	279	279
		3	835	624	P2	V4	279	279
	2	1	334	835	P2	V4	279	279
		2	861	634	P2	V4	300	300
		3	899	861	P1	V1	300	300
D5	1	1	793	899	P1	V1	300	300
		2	315	242	P1	V2	265	265
		3	741	816	P2	V4	265	265
	2	1	630	315	P2	V4	265	265
		2	496	741	P2	V4	265	265
		3	847	630	P1	V2	283	283

**Tabel 7. Pemenuhan permintaan dan persediaan di masing-masing DC (dalam unit) dengan model *decoupled***

DC	Produk	Periode	Permintaan	Kuantitas kirim	Dari pabrik	Dengan kendaraan	Persediaan DC	Min. persediaan
D1	1	1	491	268	P1	V2	333	333
				556	P2	V4		
		2	975	975	P2	V4	333	333
		3	997	997	P2	V4	333	333
	2	1	398	663	P1	V2	265	265
		2	795	795	P1	V2	265	265
3		327	327	P1	V2	265	265	
D2	1	1	134	286	P1	V1	152	152
		2	343	<b>343**</b>	P2	V4	152	152
		3	455	<b>455**</b>	<b>P2**</b>	<b>V4**</b>	152	152
	2	1	975	1300	P1	V1	325	325
		2	974	974	P1	V1	325	325
		3	363	363	P1	V1	325	325
D3	1	1	603	804	P2	V4	201	201
		2	568	568	P2	V4	201	201
		3	506	506	P2	V4	201	201
	2	1	937	96	P2	V4	313	313
				1154	P1	V2		
		2	140	<b>140**</b>	<b>P1**</b>	<b>V2**</b>	313	313
	3	889	889	P1	V2	313	313	
D4	1	1	301	580	P2	V4	279	279
		2	624	624	P2	V4	279	279
		3	835	835	P2	V4	279	279
	2	1	334	634	P2	V4	300	300
		2	861	861	P1	V1	300	300
		3	899	899	P1	V1	300	300
D5	1	1	793	242	P1	V2	265	265
				816	P2	V4		
		2	315	315	P2	V4	265	265
		3	741	741	P2	V4	265	265
	2	1	630	913	P1	V2	283	283
		2	496	496	P1	V2	283	283
3		847	847	P1	V2	283	283	

\*\* cetak tebal dalam tabel ini berarti solusi kuantitas pengiriman dll. dari model *decoupled* berbeda dengan simultan

## 6. PEMBAHASAN

Tabel 5 menunjukkan total produksi pada solusi model simultan sama dengan model *decoupled* meskipun solusi jumlah produksinya berbeda di tiap pabrik. Pada contoh numerik ini ternyata model *decoupled* produksi mampu memberikan rencana produksi yang lebih meminimalkan biaya produksi dan persediaan pabrik seperti ditunjukkan pada Tabel 8.

Selanjutnya dengan membandingkan Tabel 6 dan 7 maka pemenuhan permintaan DC hampir sama antara kedua model, kecuali D2 hanya menerima pengiriman dari P1 sebanyak 343 pada periode kedua dan pengiriman sebesar 455 untuk periode ketiganya dan D3 menerima pengiriman sebanyak 140 unit I2 bukan dari P2 tetapi dari P1 dengan menggunakan kendaraan V2 pada model *decoupled*. Dengan perbedaan pengiriman tersebut, total jumlah perjalanan kendaraan selama 3 periode dengan model *decoupled* sebanyak 29 kali dan model simultan sebanyak 27 kali. Sehingga menyebabkan biaya pengiriman dengan model *decoupled* lebih besar dibanding model simultan seperti ditunjukkan Tabel 8. Secara keseluruhan total biaya model simultan lebih kecil dibanding model *decoupled* dengan penghematan sebesar Rp 150.730,- atau sebesar 0,1%. Besarnya prosentase penghematan ini akan berbeda tergantung pada kekompleksan model (jumlah pabrik, DC dan kendaraan), rasio biaya produksi terhadap biaya transportasi, rasio biaya simpan di pabrik terhadap biaya simpan di DC, dan biaya *set up*. Dalam contoh numerik ini prosentase rata-rata biaya transportasi per unit lebih kecil dibanding rata-rata biaya produksi (sekitar 6%), sehingga penghematan yang diperoleh dengan melakukan sinkronisasi keputusan pada model simultan juga relatif kecil.

**Tabel 8. Komposisi biaya pada model simultan dan *decoupled***

Jenis biaya (Rp)	<i>Decoupled</i> produksi	<i>Decoupled</i> distribusi	Simultan	Selisih ( <i>decoupled</i> - simultan)	Selisih (%)
Produksi	97.048.000	-	97.118.000	(70.000)	(0,07)
Persediaan Pabrik	17.713.745	-	17.783.745	(70.000)	(0,4)
<i>Set up</i> Produksi	13.623.055	-	13.623.055	0	
Persediaan DC	-	14.405.080	14.860.445	(455.365)	(3,16)
Pengiriman <i>reguler</i>	-	8.146.050	7.399.955	746.095	9,16
Pengiriman <i>overtime</i>	-	-	-	0	0
<b>Total</b>	<b>128.384.800</b>	<b>22.551.130</b>	<b>150.785.200</b>	<b>15.730</b>	<b>0,1</b>

## 7. KESIMPULAN

Model simultan memberikan performansi yang lebih baik dibanding model *decoupled*, sehingga penyelesaian PIPDP yang dilakukan secara simultan akan menghasilkan keuntungan yang lebih dibanding pengambilan keputusan yang dilakukan secara sendiri-sendiri dan tanpa ada koordinasi.

Dengan menggunakan model simultan, seluruh biaya-biaya yang diperlukan untuk produksi, persediaan dan pengiriman dipertimbangkan secara bersama-sama sehingga *trade off* biaya akan terjadi diantara ketiga biaya tersebut untuk mendapatkan total biaya yang paling minimal. Selain itu solusi yang layak diperoleh dengan mempertimbangkan banyak pembatas mulai dari kapasitas produksi, kapasitas kendaraan, kapasitas waktu yang dimiliki kendaraan dan permintaan konsumen sehingga terjadi sinkronisasi diantara faktor-faktor tersebut.

Penerapan model ini dapat dilakukan pada perusahaan-perusahaan yang memiliki karakteristik *supply chain* seperti pada pembahasan sebelumnya. Secara khusus, Lei *et al.* (2006) menyatakan bahwa pengiriman langsung akan sangat cocok diterapkan untuk produk-produk yang kurang berharga, permintaan konsumen berada pada rata-rata (tidak terlalu fluktuatif), dan lokasi konsumen yang cukup tersebar. Sehingga perusahaan yang dapat menerapkan model ini diantaranya adalah pabrik pupuk, semen, bahan kimia, dan baja.

Penelitian lanjutan yang dapat dilakukan adalah mengembangkan model dengan:

1. Menambahkan beberapa faktor sehingga menjadi lebih sesuai dengan problem realita seperti *lead time* produksi, *lead time* distribusi dan produk cacat.
2. Memasukkan *supplier* dan mempertimbangkan harga bahan baku dan kapasitas produksi *supplier*.
3. Mempertimbangkan tahapan produksi yang terjadi dalam satu pabrik.
4. Membuat beberapa skenario problem dengan mempertimbangkan rasio biaya produksi terhadap biaya transportasi, rasio biaya simpan di pabrik terhadap biaya simpan di DC, dan biaya *set up*.

## DAFTAR PUSTAKA

- Barbarosoglu, G., and Ozgur, D., 1999. "Hierarchical Design of an Integrated Production and Two-Echelon Distribution System." *European Journal of Operational Research*, Vol. 118, p. 464–484.
- Benjamin, J., 1989. "An Analysis of Inventory and Transportation Costs in a Constrained Network." *Transportation Science*, Vol. 23, p. 177–183.
- Blumenfeld, D.E., Burns, L.D., Diltz, J.D., and Daganzo, C.F., 1985. "Analyzing Tradeoffs between Transportation, Inventory and Production Costs on Freight Networks." *Transportation Research*, Vol. 19B, p. 361–380.
- Chandra, P., and Fisher, M.L., 1994. "Coordination of Production and Distribution Planning." *European Journal of Operational Research*, Vol. 64, p. 83–102.
- Chen, Z.L., 2004. "Integrated Production and Distribution Operations: Taxonomy, Models, Review." *Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the E-Business Era*, Kluwer Academic Publishers.
- Cohen, M.A., and Lee, H.L., 1988. "Strategic Analysis of Integrated Production-Distribution Systems: Models and Methods." *Operations Research*, Vol. 36, p. 216–228.
- Dhaenens, F.C., and Finke, G., 2001. "An Integrated Model for an Industrial Production-Distribution Problem." *IIE Transactions*, Vol. 33, p. 705–715.
- Fumero, F., and Vercellis, C., 1999. "Synchronized Development of Production, Inventory and Distribution Schedules." *Transportation Science*, Vol. 33, p. 330–340.
- Haq, A.N., Vrat, P., and Kanda, A., 1991. "An Integrated Production-Inventory-Distribution Model for Manufacturing of Urea: A Case." *International Journal of Production Economics*, Vol. 39, p. 39–49.
- Lei, L., Liu, S., Ruszczyński, A., and Park, S., 2006. "On the Integrated Production, Inventory and Distribution Routing Problem." *IIE Transaction*, Vol. 38, No. 1, p. 955–970.
- Pujawan, I.N., 2005. *Supply Chain Management*, Guna Widya.
- Sarmiento, A.M., and Nagi, R., 1999. "A Review of Integrated Analysis of Production-Distribution Systems." *IIE Transactions*, Vol. 31, p. 1061–1074.
- Thomas, D.J., and Griffin, P.M., 1996. "Coordinated Supply Chain Management." *European Journal of Operational Research*, Vol. 94, p. 1–15.