

MODEL MATEMATIS PERSEDIAAN TERINTEGRASI ANTARA SUATU PERUSAHAAN DAN DISTRIBUTORNYA

Nyoman Sutapa

Dosen Fakultas Teknik Jurusan Teknik Industri – Universitas Kristen Petra

Fransiska

Alumnus Fakultas Teknik Jurusan Teknik Industri – Universitas Kristen Petra

ABSTRAK

Dua buah model matematis persediaan terintegrasi dianalisis. Kedua model bertujuan untuk meminimumkan total biaya persediaan dari sebuah perusahaan dan distributornya yang saling terkoordinasi dan bekerjasama. Model matematis tersebut adalah model IDQ (Identical Delivery Quantity), jumlah pengiriman produk kepada distributor adalah sama pada setiap pengiriman, dan kedua adalah model DWP (Delivery What is Produced), jumlah pengiriman kepada distributor adalah bervariasi pada setiap pengiriman, yaitu semua persediaan yang tersedia pada perusahaan saat itu dikirim ke distributor. Pada bagian akhir dari makalah ini akan ditampilkan sebuah contoh numeris, yang daripadanya akan diperlihatkan dalam keadaan bagaimana sebaiknya satu diantara kedua model dipilih.

Kata kunci: model matematis, persediaan, terintegrasi.

ABSTRACT

Two mathematical model of inventories are analysed. The aim of these models are minimizing the total cost of inventories on a company and its distributor. The first mathematical model is IDQ (Identical Delivery Quantity) model, i.e. the amount of delivery to distributor is identically for every replenishment. The second one is DWP (Delivery What is Produced) model, i.e. the amount of delivery to distributor is not identically for every replenishment, all of distributor's inventories are supplied to distributor. Both of these models, handling the cooperation of inventory control between company and one distributor. At the end of this paper, will be showed a numerical example and from it will be analyzed in which situations one of these models is the best.

Keywords: mathematical model, inventory, integrated.

1. PENDAHULUAN

Suatu perusahaan yang bekerjasama dengan distributornya sering menghadapi masalah tentang persediaan di kedua belah pihak. Untuk itu diperlukan suatu kebijakan produksi dan persediaan, untuk jenis –jenis item yang akan diproduksi dan disuplai oleh perusahaan, yang terkoordinasi diantara kedua belah pihak tersebut, tujuannya adalah meminimumkan total biaya gabungan antara perusahaan dan distributornya, yang dalam hal ini terdiri dari biaya persiapan untuk menjalankan proses produksi pada perusahaan, biaya pemesanan pada distributor serta biaya penyimpanan persediaan pada perusahaan dan distributornya. Untuk menghitung total biaya gabungan tersebut akan didekati dengan dua buah model matematis, Viswanathan [7]. Kedua model ini didasarkan atas dua strategi yaitu:

- Jumlah pengiriman kepada distributor adalah sama pada setiap pengiriman. Kebijakan ini disebut sebagai strategi IDQ (Identical Delivery Quantity), model ini dikembangkan oleh Lu [5].
- Jumlah pengiriman kepada distributor adalah tidak sama pada setiap pengiriman. Pada setiap pengiriman, semua persediaan yang tersedia pada perusahaan dikirim langsung ke distributor. Kebijakan ini disebut sebagai strategi DWP (Delivery What is Produced), Goyal [4].

Menurut Lu [5], asumsi penting sebelum mengimplementasikan model IDQ, adalah perusahaan harus mengetahui jumlah permintaan dalam suatu periode tertentu, serta biaya simpan dan biaya pesan dari distributor. Secara umum, kedua model mengasumsikan bahwa data-data permintaan, rata-rata produksi dan biaya setup pada perusahaan serta biaya order pada distributor diketahui dan konstan. Sedangkan, biaya kekurangan persediaan tidak diperhitungkan.

2. MODEL MATEMATIS PERSEDIAAN TERINTEGRASI

Berikut adalah notasi-notasi dan definisi-definisi yang digunakan dalam perumusan model matematis persediaan terintegrasi:

Z : total biaya gabungan per tahun

r : perkiraan biaya penyimpanan dari modal yang ditanamkan dalam prosentase (unit/tahun)

C_v : biaya manufakturing pada perusahaan per unit (Rp/unit)

C_b : harga pembelian pada distributor per unit produk (Rp/unit)

H_v : biaya penyimpanan persediaan per unit produk pada perusahaan per tahun (Rp/unit)

H_b : biaya penyimpanan persediaan per unit produk pada distributor per tahun (Rp/unit)

S : biaya produksi pada perusahaan per setup (Rp/setup)

A : biaya pesanan pada distributor untuk setiap pengiriman (Rp/pesan)

P : rata-rata produksi pada perusahaan per tahun (unit)

D : jumlah permintaan dari distributor per tahun (unit)

$\gamma = D/P$: perbandingan antara permintaan dan rata-rata produksi

$n = 1/\gamma = P/D$: perbandingan antara rata-rata produksi dan permintaan

$\alpha = A/S$: perbandingan antara biaya pesan dan biaya setup

$\beta = H_b/H_v$: perbandingan biaya penyimpanan persediaan

q_1 : jumlah pengiriman dari perusahaan ke distributor

Q : jumlah produksi pada perusahaan per production run (unit)

$$Q = \sqrt{\frac{2D(A+S)}{(H_b - H_v) + H_v \left(1 + \frac{D}{P}\right)}}$$

$T = Q/D$: interval waktu antara production run (tahun)

k : jumlah pengiriman dari distributor dalam sekali produksi.

2.1 Model Matematis IDQ

Biaya tahunan yang diadakan oleh perusahaan, menurut Lu [5] dirumuskan

$$Z_1 = \frac{S \cdot D}{Q} + \frac{1}{2} D r \cdot C_v \cdot \frac{Q}{D} \left[1 - \frac{D}{P} + \left(\frac{2D-1}{P \cdot k} \right) \right],$$

atau

$$Z_1 = \frac{S}{T} + \frac{1}{2} D \cdot H_v \cdot T \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right]$$

Sedangkan, biaya tahunan yang diadakan oleh distributor dapat dirumuskan sebagai :

$$Z_2 = \frac{A \cdot D \cdot k}{Q} + \frac{1}{2} D \cdot r \cdot C_b \left(\frac{Q}{D \cdot k} \right)$$

atau

$$Z_2 = \frac{A \cdot k}{T} + \frac{1}{2} D \cdot H_b \left(\frac{T}{k} \right)$$

Sehingga, total biaya gabungan yang diadakan oleh perusahaan dan distributor, untuk suatu nilai T dan k tertentu merupakan gabungan antar Z_1 dan Z_2 :

$$Z(T, k) = Z_1 + Z_2$$

$$Z(T, k) = \left(\frac{A \cdot k + S}{T} \right) + \frac{1}{2} D \cdot T \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}$$

Untuk nilai tertentu k, nilai ekonomis dari T, yaitu nilai optimal Z terhadap T, dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\frac{dZ}{dT} = 0$$

$$T^2 = \frac{2(Ak + S)}{\sqrt{D \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}}} \quad (1)$$

Jadi, untuk nilai tertentu k, nilai optimum dari Z dapat diturunkan sebagai berikut:

$$Z(T, k) = \frac{(Ak + S)}{T} + \frac{1}{2} DT \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}$$

Dimana T seperti pada persamaan (1). Dengan demikian nilai Z optimal adalah:

$$Z(k) = \frac{(Ak + S) \sqrt{D \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}}}{\sqrt{2(Ak + S)}} + \frac{1}{2} D \frac{\sqrt{2(Ak + S)}}{\sqrt{D \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}}} \left\{ H_v \left[1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma-1}{k} \right) \right] + H_b \left[\frac{1}{k} \right] \right\}$$

atau

$$Z(k) = \sqrt{2DS} H_v \sqrt{(\alpha k + 1) \left\{ 1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right) \right\}} \quad (2)$$

Nilai optimum k , katakan sebagai k_1 , dapat ditemukan dengan meminimumkan $Z^2(k)$ dari persamaan (2), seperti berikut ini:

$$Z^2(k) = 2D \cdot S \cdot H_v \left[\alpha k(1 - \gamma) + (1 - \gamma) + \alpha \cdot k \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right) + \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right) \right]$$

Setelah mengabaikan variabel-variabel dan konstanta-konstanta yang bebas dari k masalah minimisasi ini dapat disederhanakan menjadi:

$$Z^2(k) \approx \alpha k(1 - \gamma) + \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right)$$

Nilai ekonomis dari $k = k_1$, diperoleh ketika:

$$Z^2(k) = \alpha k(1 - \gamma) + \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right) \quad (3)$$

$$Z^2(k_1) \leq Z^2(k_1 - 1) \quad (4)$$

dan

$$Z^2(k_1) \leq Z^2(k_1 + 1) \quad (5)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4) dan (5) ke persamaan (3), maka didapatkan:

$$k_1(k_1 - 1) \leq \frac{2\gamma - 1 + \beta}{(1 - \gamma)\alpha} \quad (6)$$

dan

$$k_1(k_1 + 1) \geq \frac{2\gamma - 1 + \beta}{(1 - \gamma)\alpha} \quad (7)$$

Gabungkan persamaan (6) dan (7) akan didapat:

$$k_1(k_1 - 1) \leq \frac{2\gamma - 1 + \beta}{(1 - \gamma)\alpha} \leq k_1(k_1 + 1)$$

Maka nilai optimal total biaya gabungan untuk strategi IDQ adalah:

$$Z^*(IDQ) = \sqrt{2D \cdot S \cdot H_v} \sqrt{(\alpha \cdot k + 1) \left(1 - \gamma + \left(\frac{2\gamma - 1 + \beta}{k} \right) \right)}$$

2.2 Model Matematis DWP

Total jumlah produksi yang dikirimkan dari perusahaan ke distributor, menurut Goyal [5], dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Q = \frac{q_1(n^k - 1)}{(n-1)}$$

Selanjutnya, total biaya gabungan untuk suatu nilai q_1 dan k tertentu adalah:

$$Z(k) = \frac{D(Ak + S)}{Q} + \frac{rq_1}{2} \left(C_b + \frac{C_v}{n} \right) \left(\frac{n^k + 1}{n + 1} \right)$$

atau

$$Z(k) = \frac{D(Ak + S)(n-1)}{q_1(n^k - 1)} + \frac{1}{2} q_1 \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) \frac{n^k + 1}{n + 1}$$

Untuk nilai tertentu k , maka nilai ekonomis dari $q_1 = q(k)$, dapat diturunkan seperti dibawah ini:

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = 0$$

(syarat Z optimal jika ditinjau terhadap q_1)

$$-\frac{D(A \cdot k + S)(n-1)}{q_1^2(n^k - 1)} + \frac{1}{2} \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) \frac{n^k + 1}{n + 1} = 0$$

yang akhirnya setelah disederhanakan didapatkan

$$q_1 = \sqrt{\frac{2D(Ak + S)(n^2 - 1)}{(n^{2k} - 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right)}} \quad (8)$$

Jadi, untuk nilai k yang diberikan, nilai optimum dari Z dapat diturunkan sebagai berikut:

$$Z(k) = \frac{D(Ak + S)(n-1)}{q_1(n^k - 1)} + \frac{1}{2} q_1 \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) \frac{n^k + 1}{n + 1}$$

Dimana q_1 seperti pada persamaan (8), dengan demikian nilai dari $Z(k)$ dapat dinyatakan dengan:

$$Z(k) = \frac{D(Ak + S)(n-1) \sqrt{(n^{2k} - 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right)}}{\sqrt{2D(Ak + S)(n-1)(n^k - 1)}} + \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2D(Ak + S)(n^2 - 1)}}{\sqrt{(n^{2k} - 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right)}} \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) \frac{n^k + 1}{n + 1} \right) \quad (9)$$

Dari persamaan (9), bila terlebih dahulu dikuadratkan, maka akan didapat bentuk yang lebih sederhana, yaitu:

$$Z^2(k) = \frac{1}{2} D \frac{(Ak + S)(n - 1)^2 (n^k - 1)(n^k + 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right)}{(n - 1)(n + 1)(n^k - 1)^2} +$$

$$\frac{1}{2} D \frac{(Ak + S)(n - 1)(n + 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) (n^k + 1)^2}{(n^k - 1)(n^k + 1) (n + 1)^2} +$$

$$D \frac{(Ak + S)(n - 1) \left(H_b + \frac{H_v}{n} \right) (n^k + 1)}{(n^k - 1)(n + 1)}$$

Persamaan ini disederhanakan dan dicari akarnya, didapatkan:

$$Z(k) = \sqrt{2DSH_v} \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)(1 - \gamma)(1 + \gamma^k)(1 + k\alpha)}{(1 + \gamma)(1 - \gamma^k)}}$$

Akhirnya, nilai optimal dari total biaya gabungan untuk strategi DWP dapat dinyatakan dengan:

$$Z^*(DWP) = \sqrt{2DSH_v} \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)(1 - \gamma)(1 + \gamma^{k_2})(1 + k_2\alpha)}{(1 + \gamma)(1 - \gamma^{k_2})}}$$

2.3 Rasio Perbandingan Biaya antara Model Matematis IDQ dan DWP

Untuk dapat menentukan strategi mana yang lebih baik antara model IDQ dan DWP, maka dilakukan perhitungan rasio biaya yang didapat dari model IDQ dengan model DWP, dirumuskan sebagai :

$$R = \frac{Z^*(IDQ)}{Z^*(DWP)} \times 100\%$$

Apabila nilai R lebih besar dari 100%, maka kebijakan persediaan terintegrasi yang dimodelkan dengan model DWP merupakan strategi yang lebih baik. Tetapi sebaliknya, apabila nilai R kurang dari 100%, maka kebijakan yang dimodelkan dengan IDQ merupakan strategi yang lebih baik.

3. CONTOH NUMERIS

Berikut adalah sebuah contoh numeris penentuan strategi untuk meminimalkan biaya total gabungan persediaan antara sebuah perusahaan yang memproduksi plastik dan sebuah distributor penjualannya. Data-datanya terangkum sebagai berikut, Fransiska [1]: $H_v = r.C_v = 0,2 \text{ unit/tahun} \times \text{Rp } 98.561,992 = \text{Rp } 19.712,3984 \text{ unit/tahun} = \text{Rp } 1.642,6999 \text{ unit/bulan}$. $H_b = r.C_b = 0,2 \text{ unit/tahun} \times \text{Rp } 146.000 = \text{Rp } 29.200 \text{ unit/tahun} = \text{Rp } 2.433,3333 \text{ unit/bulan}$.

$\alpha=A/S=\text{Rp } 128.700/\text{Rp } 182.000 = 0,7071$ dan $\beta=H_b/H_v = \text{Rp } 2.433,3333/\text{Rp } 1.642,6999 = 1,4813$.

Hasil pengolahan data untuk model IDQ dalam kurun waktu 4 bulan terangkum pada Tabel 1, sedangkan hasil pengolahan data untuk model DWP dalam kurun waktu 4 bulan, dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 1: Biaya Total Gabungan dengan Model Matematis IDQ

Bulan	D (unit)	γ	N	Q (unit)	T (bulan)	K_1	Z*(IDQ) (Rupiah)
1	18.015	0,7206	1,3877	1.760	1	3	5.562.333,741
2	17.020	0,6808	1,4689	1.726	1	3	5.445.462,913
3	16.057	0,6423	1,557	1.692	1	3	5.325.282,76
4	14.497	0,5799	1,7245	1.632	1	2	5.095.428,765

Tabel 2. Total Biaya Gabungan dengan Model Matematis DWP

Bulan	D (unit)	γ	N	k_2	q(k_2) (unit)	Q (unit)	Z*(DWP) (Rupiah)
1.	18.015	0,7206	1,3877	1	1.760	1.760	6.363.414,12
				2	1.224	2.923	5.420.764,97
				3	924	3.986	5.137.879,17
				4	710	4.960	5.062.788,03*
				5	547	5.850	5.088.597,77
2.	17.020	0,6808	1,4689	1	1.726	1.726	6.128.857,9
				2	1.155	2.852	5.245.745,86
				3	835	3.864	5.007.001,38
				4	612	4.772	4.975.130,76*
				5	448	5.579	5.044.337,10
3.	16.057	0,6423	1,557	1	1.692	1.692	5.899.369,25
				2	1.087	2.780	5.077.211,61
				3	750	3.736	4.884.179,14*
				4	522	4.571	4.896.383,30
4	14.497	0,5799	1,7245	1	1.632	1.632	5.522.862,11
				2	974	2.654	4.805.503,33
				3	617	3.515	4.691.890,59*
				4	391	4.234	4.777.786,13

Rasio antara biaya yang didapat dari model IDQ dan model DWP dapat dilihat pada tabel 3:

Tabel 3. Rasio Total Biaya antara Model IDQ dan DWP

Bulan	1	2	3	4
R (%)	109,8670	109,4537	109,0313	108,6008

Dari Tabel 3 ini terlihat bahwa dalam 4 periode (bulan), strategi dengan model DWP merupakan strategi yang lebih baik untuk meminimumkan total biaya gabungan.

Jika ditinjau secara umum rasio/perbandingan biaya total antara IDQ dan DWP, untuk nilai-nilai α , β dan γ yang bervariasi, dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Rasio/Perbandingan R antara Total Biaya Gabungan dari Model IDQ dan DWP untuk α , β dan γ yang Bervariasi

$\alpha = A/S$	$\beta = H_b / H_v$	$\gamma = 0.20$	$\gamma = 0.40$	$\gamma = 0.60$	$\gamma = 0.80$
0,01	1,50	90,98	95,26	99,83	105,90
0,01	1,75	86,01	90,60	95,52	102,00
0,01	2,00	81,87	86,68	91,83	98,63
0,01	3,00	70,34	75,48	81,10	88,63
0,10	1,50	98,52	103,69	108,97	113,72
0,10	1,75	94,92	100,27	105,84	111,16
0,10	2,00	91,89	97,47	103,23	108,96
0,10	3,00	83,21	88,98	95,39	102,33
0,20	1,50	100,90	105,66	109,85	113,45
0,20	1,75	97,99	102,99	107,30	111,44
0,20	2,00	95,45	100,84	105,19	109,66
0,20	3,00	88,25	93,56	98,83	104,43
1,00	1,50	100,00	105,43	107,30	109,04
1,00	1,75	100,00	102,95	106,38	108,24
1,00	2,00	100,00	102,76	105,64	107,38
1,00	3,00	96,83	99,70	102,50	104,85
2,00	1,50	100,00	100,69	105,85	106,68
2,00	1,75	100,00	100,69	104,95	106,27
2,00	2,00	100,00	100,69	104,21	105,68
2,00	3,00	99,60	99,70	102,26	103,93

4. KESIMPULAN

Pemilihan kebijakan persediaan terintegrasi menurut strategi IDQ atau DWP, didasarkan atas kecenderungan nilai dari α , β dan γ . Berikut disajikan kesimpulan, Tabel 5 dibawah ini, dari hasil simulasi seperti yang ditunjukkan Tabel 4 subbagian III di atas.

Tabel 5. Pilihan Strategi Berdasarkan Kecenderungan α , β dan γ

α	β	γ	Strategi yang dipilih
Naik	Naik	Naik	DWP
Turun	Naik	Naik	IDQ
Turun	Naik	Turun	IDQ
Naik	Turun	Naik	DWP
Turun	Turun	Naik	DWP
Naik	Naik	Turun	IDQ

DAFTAR PUSTAKA

- Fransiska,1999, *Strategi Optimal untuk Model Persediaan yang Terintegrasi antara Vendor-Buyer di PT. San Shine*, Skripsi/Tugas Akhir No. 247/TI-73/1999, Jurusan Teknik Industri, UK. Petra.
- Goyal.S.K, 1988, A Joint Economic Lot-Size Model for Purchaser and Vendor: A Comment. *Decision Science*, 236-241.
- Goyal, Suresh K., and Yash P. Gupta. ,1989, *Integrated Inventory Model: The Buyer-Vendor Coordination*. *European Journal of Operation Research*, vol. 41, 261-269.
- Goyal, S.K.,1995, *A One-Vendor Multi-Buyer Integrated Inventory Model: A Comment*. *European Journal of Operation Research*, vol. 82.1995, 209-210.
- Lu, Lu, 1993, *A One-Vendor Multi-Buyer Integrated Inventory Model*. *Europe Journal of Operation Research*, vol. 81, 312-323.
- Tersine, Richard J., 1988, *Principles of Inventory and Materials Management*. 3rd edition, North Holland, New York.
- Viswanathan, S., 1998, *Optimal Strategi for Integrated Vendor-Buyer Inventory Model*. *European Journal of Operation Research*, vol. 105, 38-42.